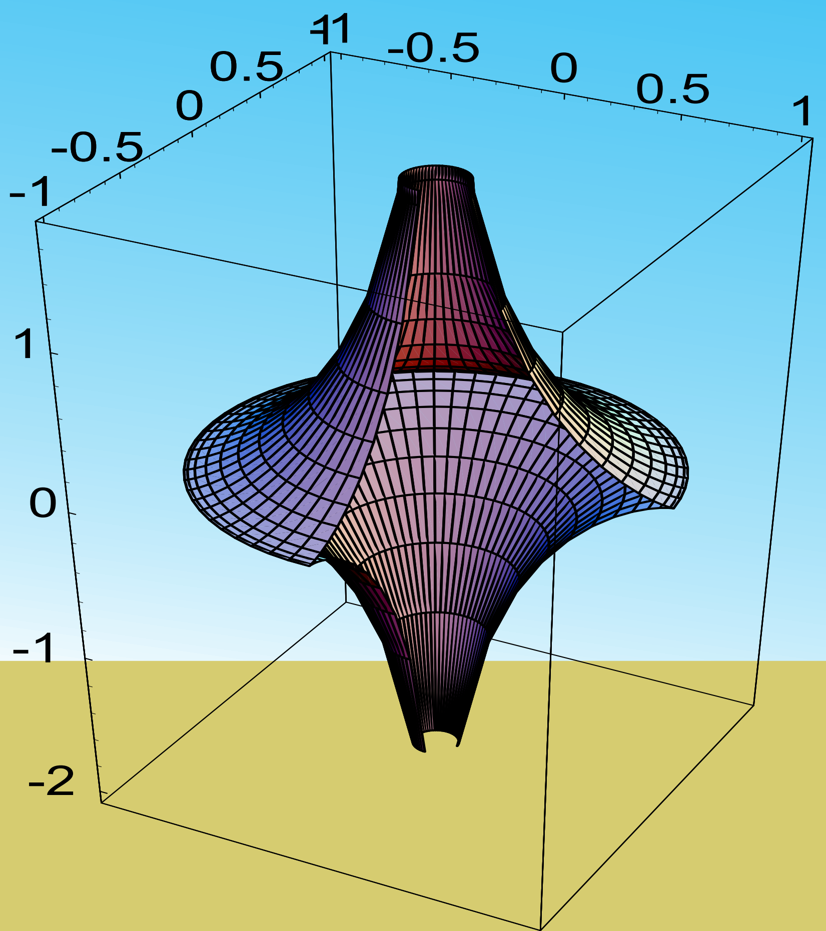
UNIVERSIDAD NACIONAL AMAZÓNICA DE MADRE DE DIOS
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BASICAS

CÁLCULO
I y II

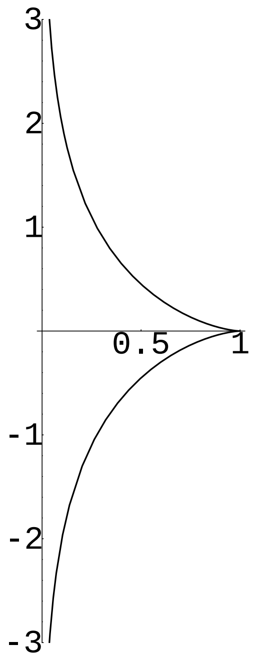


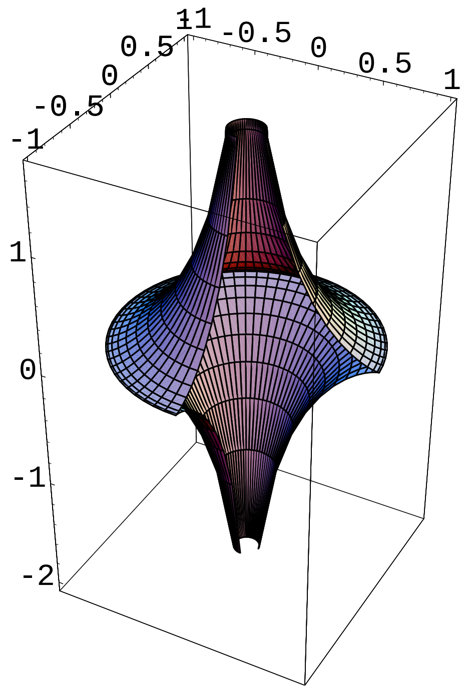
AUTORES:
Dr. VÍCTOR RÍOS FALCÓN
Mg. RICHAR MARLÓN MOLLINEDO CHURA
Dr. ELISEO PUMACALLAHUI SALCEDO

PRIMERA EDICIÓN
2017

UNIVERSIDAD NACIONAL AMAZÓNICA DE MADRE DE DIOS
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS

CALCULO I y II





Dr: Víctor Ríos Falcón
Mg. Richar Marlón Mollinedo Chura
Dr. Eliseo Pumacallahui Salcedo

UNIVERSIDAD NACIONAL AMAZÓNICA DE MADRE DE DIOS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS

Madre de Dios, Capital de la Biodiversidad del perú

Cálculo I y II

Dr: Víctor Ríos Falcón
Mg: Richar Marlón Mollinedo Chura
Dr: Eliseo Pumacallahui Salcedo

Puerto Maldonado Julio 2017

Presentación

El presente Texto Universitario denominado Cálculo I y II, es uno de los once (11) ganadores del Concurso de Proyectos de Investigación en Ciencias Básicas y Sociales del 2015 aprobado con Resolución N° 052-2015- UNAMAD-VRI, de fecha de 15 de diciembre del año 2015. Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo Vectorial y Múltiples Integrales constituyen un valioso instrumento de material bibliográfico para la consulta de los estudiantes de Ciencias e Ingeniería, docentes o administrativos cualesquiera sea su desempeño profesional en la Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios, ya que en ellos, se encuentra la genuina aplicación y orientación del proceso de enseñanza y aprendizaje en contenidos temáticos en el quehacer académico de formación Pre Grado en áreas de Matemáticas con aplicación a Ecoturismo, Administración e Ingenierías entre otros. La finalidad del Texto Universitario cálculo I y cálculo II es alcanzar una herramienta matemática superior necesaria a los estudiantes para que puedan tener de guía los conceptos, propiedades y una serie de ejercicios o problemas resueltos ajustables al contexto real, en especial de interés para la comunidad universitaria en Ciencias Exactas-Sociales e Ingenierías de la región de Madre: UNAMAD, UNSAAC y entre otras.
El Texto Universitario de Cálculo I y II fué elaborado por los Docentes: Víctor Ríos Falcón, Richar Marlón Mollinedo Chura, Eliseo Pumacallahui Salcedo, quienes desarrollan los fundamentos matemáticos necesarios para la aplicación a una gama de problemas o ejercicios correspondientes a los fundamentos teóricos del Cálculo Diferencial e Integral,y cálculo vectorial e integrales múltiples; su avance se expresa de la selección cuidadosa y desarrollo de contenidos temáticos respectivos en coordinación del equipo de Docentes y apoyo incondicional de Colegas del Departamento Académico de Ciencias Básicas y Facultad de Ingeniería.
Debemos aclarar, la experiencia en la Docencia Universitaria en el proceso de enseñanza a las diferentes Escuelas Profesionales de la UNAMAD, siendo nuestra profesión de Matemáticos, se amalgaman y dan como fruto la producción intelectual del Texto Universitario de Cálculo I y II que enmarcan un perfil profesional de madurez, que seguramente llenarán, fortalecerán los vacíos o dudas académicas de los señores estudiantes universitarios durante su formación profesional y contribuir en la mejora progresiva del saber matemático básico a superior, familiarizándolos con el lenguaje formal y riguroso de la matemática avanzada en la comprensión, aplicación y evocar

los conceptos, propiedades, teoremas en el quehacer de la vida académica en temas desarrollados en cada capítulo y las ideas sustanciales y modelables de naturaleza humana, medio ambiente, salud, economía, física entre otros modelos matemáticos y fundamentados por el lenguaje de la matemática superior.
Víctor Ríos Falcón.
Richar Marlón Mollinedo Chura.
Eliseo Pumacallahui Salcedo.

Puerto Maldonado, julio de 2017.

Prólogo

El propósito del presente Texto Universitario de Cálculo I y II:Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo vectorial e Integrales Múltiples es para exponer de manera rigurosa y formal los conceptos básicos, propiedades, teoremas que fundamentan los contenidos temáticos con las técnicas y métodos conocidos de resolución de problemas y ejercicios del proceso de diferenciación e integración de funciones reales, funciones vectoriales establecidas en el lenguaje matemático formal, siendo un instrumento de guía de material bibliográfico para estudiantes de Escuelas Profesionales de Ciencias Contables, Ciencias Administrativas e Ingenierías, Ecoturismo y Educación; los cuales permiten analizar, comprender y aplicar a los fenómenos físicos, ambientales, ecológicos, económicos y sociales entre otros, que ocurren en la naturaleza o fenómenos hechos por la intervención de la mano del hombre, y son representados por modelos matemáticos y permiten a comprender los conceptos básicos establecidos y ayudan a aclarar el panorama de la matemática superior.
La experiencia en la Docencia Universitaria, nos ha permitido desarrollar y consolidar el Texto Universitario de Cálculo I, II conteniendo una gama de ejercicios, problemas resueltos y propuestos, representaciones gráficas para explicar las soluciones generales o particulares y para dar la interpretación geométrica o física de los fenómenos o situaciones reales que ocurren en nuestro contexto social, y se fundamentan en los conceptos establecidos por matemáticos emblemáticos, científicos tales como: Isaac Newton y G.W. Leibnitz, John Wallis, D'alambert A. L Cauchy, Karl Weierstrass, B, Riemann, I. Barrow. que corresponde a la asignatura de análisis matemático I, para estudiantes universitarios de la región de Madre de Dios, es especial Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios, Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco, Universidad Nacional del Altiplano; el Texto Universitario de Cálculo I comprende del Capítulo I a Capítulo IV y de Cálculo II comprende del Capítulo V a Capítulo VIII

El capítulo I comprende la estructura del estudio y análisis formal de límites y continuidad de funciones reales, las propiedades de límites finitos, infinitos o al infinito, límites de funciones trigonométricas, además el estudio de la continuidad o discontinuidad de funciones reales; aplicaciones de limites al contexto real y se presentan una gama de ejercicios resueltos y propuestos de cada tema considerado.

El capítulo II se presentan las derivadas de funciones reales, el problema de la pendiente y el problema de las velocidades, propiedades de derivación, derivadas de funciones logarítmicas, trigonométricas. Derivadas de orden superior, derivadas de funciones trigonométricas directas e inversas, la diferenciabilidad y continuidad de funciones reales, aplicación de las derivadas de funciones reales asociadas a fenómenos o situaciones reales en la naturaleza, como razón de cambio de las cantidades dependientes respecto a otras cantidades independientes, estudio de los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, aplicación de la derivada a economía y se consideran una gama de ejercicios resueltos y prepuestos.

El capítulo III se dedica al estudio de las integrales indefinidas y sus aplicaciones, fórmulas de grupos de integración, integración por partes y técnicas de integración y las aplicaciones al problema de enfriamiento de Newton, crecimiento o decrecimiento poblacional y finamente el capítulo IV, trata de las integrales definidas y sus aplicaciones, propiedades de integrales definidas.

El capítulo IV comprende la suma finita de integrales de Riemann, el problema de áreas limitadas por curvas y el problema de volumen de sólido revolución generada por una superficie alrededor de un eje o recta. Tipo discos, arandelas.

El capítulo V se expone los preliminares necesarios para abordar adecuadamente el estudio del cálculo para funciones cuyo dominio y/o codominio es el espacio $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$, estudiaremos algunos aspectos como operaciones con vectores en $\mathbb{R}^3$, rectas y planos en $\mathbb{R}^3$, superficies cilíndricas y cuadráticas finalmente coordenadas cilíndricas y esféricas.

El capítulo VI Estable los conocimientos necesarios para el trazado de las curvas de tal manera que en cada punto de la misma se determine el triedro móvil, así como los planos osculadores, normal y rectificante.

El capítulo VII comprende la estructura de funciones de varias variables, derivas parciales de dos o más variables, criterio de las derivadas parciales para extremos relativos.

El capítulo VIII establece los fundamentos necesarios para la interpretación y aplicación de la integral doble y triple

A lo largo del desarrollo de Texto Universitario se consideran una gran variedad de problemas, ejercicios resueltos y propuestos según los capítulos desarrollados. Como autores asumimos nuestra responsabilidad de cuantos errores y erratas que aparezcan en el presente Texto Universitario de Cálculo I. Concluimos anticipadamente nuestro sincero agradecimiento a los señores estudiantes, colegas y lector en general por la acogida que le pueden brindar la presente Texto Universitario y solicito a la buena voluntad y fe, que hagan llegar sus observaciones, sugerencias y/o críticas constructivas, para poder corregir los errores involuntarias que se hayan cometido en su elaboración y desarrollo del presente Texto. Expresamos las muestras de gratitud a todas las personas que de manera directa o indirectamente contribuyeron en la realización de Texto Universitario, en particular a las Autoridades, en especial al Vicerrectorado de la UNAMAD por declararnos ganador en el Proceso de Concurso de Proyecto de Elaboración de Textos Universitarios y de otorgar el presupuesto económico para su ejecución de dicho Texto Universitario de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios Docentes de la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco.

Los Autores.

Índice general

Capítulo 1

Límites y continuidad de funciones reales

1.1. Introducción

Esta asignatura comienza como base del estudio de la estructura de límites de funciones definidas en su dominio contenido en la recta real, llamadas variable dependiente $f(x)$, cuando la variable independiente x sean tan cercanas como se quiere a un valor numérico x_0; es decir las funciones reales tienden a un valor real. El límite de un objeto es el cambio de velocidad y aceleración esto implica concepto físico, pero análisis de la recta secante aproximación a la recta tangente es el estudio geométrico. Las áreas, volúmenes, longitud de arco, centroides y una variedad de conceptos que han permitido fundamentar a los científicos, ingenieros, economistas de crear modelos matemáticos para describir un fenómenos del contexto social; el concepto de continuidad, derivada de una función, integrales indefinidas o definidas. La noción de derivada e integral de una función ponen al estudiante universitario dos problemas básicos del Cálculo: Cálculo diferencial e Cálculo integral resultando dos operaciones inversas fundamentado por matemáticos K. Weierstrass, B.; éstos conceptos establecidos son aplicados a problemas del contexto real vinculadas a ciencias e ingenierías, humanidades o sociales que es de gran utilidad en la formación del futuro profesional, [4], [6]. La matemática superior, tiene un nivel altamente formativo, académico y dinámico tiende desarrollar capacidades, habilidades y la adquisición de conocimientos los cuales contribuyen en la formación profesional del estudiante universitario. El cálculo diferencial e integral proporcionan a los futuros ingenieros y licenciados,

conocimientos básicos necesarios para aplicar a situaciones prácticas vinculadas a su ejercicio profesional para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas; plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos de una variedad de situaciones reales del contexto en general, además permite identificar y entender el rol que juega el cálculo diferencial e integral en el mundo de la ciencia y tecnología moderna.
La formalización del concepto de límites para funciones reales es indispensable su desarrollo, de modo que constituye la piedra angular sobre el cual descansan dos pilares más importantes del cálculo en la matemática superior, uno cálculo diferencial y otro cálculo integral, tratan específicamente de cambios infinitesimales de variables independientes y dependientes de cantidades reales que describen situaciones reales u objetos de estudio, tales cambios pueden ser físicos, transformaciones químicos, mutaciones biológicos, maximizaciones de utilidades y minimización de costos, cambios sociales, jurídicos los cuales permiten ser expresados a través de modelos matemáticos, utilizando conceptos de limite de funciones, continuidad de funciones , derivada de funciones e integrales de funciones, de este modo poder predecir situaciones, fenómenos a través de modelamientos matemáticos en el tiempo y espacio con aplicaciones de la tecnología en el área [4], [13].

Figura 1.1: Fundamento básico del cálculo

Definición 1.1 (Vecindad abierta en un punto) *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama abierto cuando todo sus puntos son interiores esto es, $int(A) = A$. Si dice que A es abierto , si y solo si para cada $x \in A$ existe un intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ tal que verifica: $x \in \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$.*
Sea cualesquiera $x \in \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, se denomina vecindad abierta o bola abierta de centro x_0 y con radio $\delta > 0$, al conjunto de distancias de x a x_0 que sean menores que el radio δ, expresada [7], [8].
$B(x_0, \delta) =< x_0 - \delta, x_0 + \delta >= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$. *Cuya representación gráfico es:*

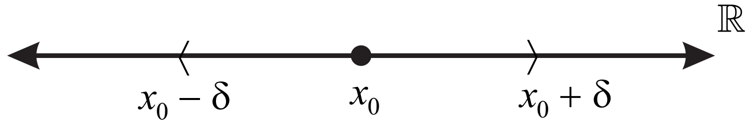


Figura 1.2: Vecindad abierta en x_0

Definición 1.2 (Vecindad cerrada en un punto) *Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y solamente si, su complemento es abierto $A^c = \mathbb{R} - A$. Diremos que un punto a es adherente a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, cuando a sea límite de una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de elementos de A, [7].*
Se denomina vecindad cerrada de centro x_0 y con radio $\delta > 0$, al conjunto de distancias del punto x al punto x_0 que son menores o iguales a δ, expresada [7], [8], es decir:

$$B(x_0, \delta) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \delta\}$$

.

Teorema 1.1.1 *Un punto $a \in \mathbb{R}$ es adherente a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ se verifica $A \cap \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \neq \emptyset$.*

Definición 1.3 (Punto de acumulación) *Sea x_0 un punto de acumulación del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si y solo si, toda vecindad $B_i(x_0, \delta_i)$ contiene al menos una vecindad abierta mas pequeña entre ellos con centro x_0 y $A \bigcap B_i(x_0, \delta_i) \neq \emptyset$ con $i = 1, 2, ...;$ [7], [8].*

Teorema 1.1.2 *Para todo $A \subset \mathbb{R}$, se verifica $\overline{A} = A \bigcup A'$, ósea la adherencia de un conjunto A se obtiene añadiendo al conjunto A los punto de acumulación, esto la clausura del conjunto A.*

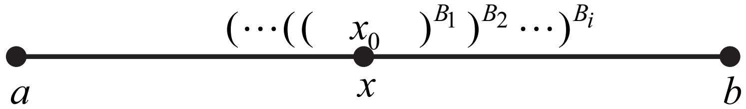


Figura 1.3: Punto de acumulación en x_0

Definición 1.4 (Función acotada) *Una función $f(x)$ se dice ser acotada, si existe un número real M^+ de tal modo verifica $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D \subset \mathbb{R}$, [7], [8].*

Ejemplo 1.1.1 *Sea subconjunto $A = [-2, 5 > \subset \mathbb{R}$, y definir las vecindades abiertas de centros -3, 2, 4, 5 y 7 , y radios 0.1; 0.2; 0.5; 0.3 y 0.1.*

Demostración:

$$B(-3, 0.1) = [-3 - \delta, -3 + \delta] = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < 0.1\}$$

es una vecindad abierta de radio $\delta = 0.1$ y centro $x_0 = -3$

$$B(2, 0.2) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 0.2\}$$

es una vecindad abierta de radio $\delta = 0.2$ y centro $x_0 = 2$

$$B(4, 0.5) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| < 0.5\}$$

es una vecindad abierta de radio $\delta = 0.5$ y centro $x_0 = 4$

Ejemplo 1.1.2 *Sea el subconjunto $B = [-2, 9 > \subset \mathbb{R}$, establecer si los puntos -3, 4, 7, 9 y 11 son puntos de acumulación.*

Demostración:
Afirmamos los puntos -3 y 11 no son puntos de acumulación del conjunto B debido a que no existe ninguna vecindad abierta mas pequeña que encierre a estos puntos; mientras los puntos -3, 4, 7 y 9 son puntos de acumulación del conjunto B, debido a que existen vecindad abierta mas pequeña que encierre a estos puntos.

Ejemplo 1.1.3 *La función definida por $f(x) = 3x + 2$ es acotada en $1 \leq x \leq 3$.*

Demostración:

1º A la desigualdad multiplicar por 4 a los extremos y medio, resulta la desigualdad siguiente $3 \leq 3x \leq 9$.

2º A continuación sumar $+3$ a cada miembro y al medio realizando las operaciones de aritmética resulta $3 + 2 \leq 3x + 2 \leq 11$ entonces $5 \leq f(x) \leq 11$.

3º La función es acotada superiormente por $M = 11$, y la misma función es acotada inferiormente por $m = 5$

4º Interpretación geométrica de las cotas superior e inferior de la función es dada en el intervalo.

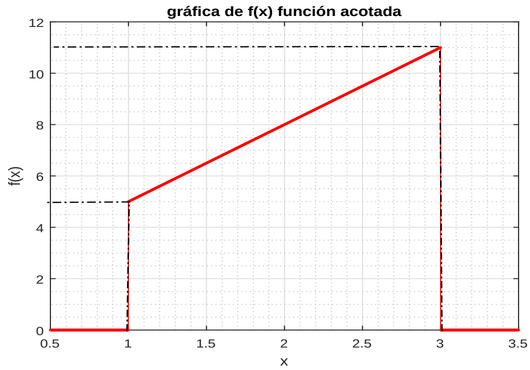


Figura 1.4: Función acotada

1.2. Límites de funciones reales

El concepto de límite ocupa una posición central y constituye una base fundamental que trata de fenómenos físicos, económicos, ambientales y sociales de aproximarse a un valor tan cercano o tan próximo como lo especifique y aún nunca se logra alcanzarlo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades durante el proceso de enseñanza - aprendizaje del cálculo diferencial y integral de una función real de variable real y de varias variables. Primero por su carácter estructural que constituye la piedra angular, sobre el cual se desarrollan dos estructuras fundamentales, uno cálculo diferencial y otro cálculo integral entre otros conceptos relacionados de la matemática superior.Segundo por su carácter instrumental es una herramienta fundamental que permite encontrar solución de problemas del contexto real o ejercicios en el interior de la matemática pura, matemática aplicada a la ingeniería, la física, ciencias financieras, ciencias sociales; el estudio que se gesta en diferentes contextos de la ciencia como: Análisis Real, Topología, análisis matemático I y II, además calculo vectorial que expresan fenómenos reales que acontecen alrededor de nuestra vida como producto de la manipulación de la mano del hombre o forma natural, [13],[21].

Ejemplo 1.2.1 *El concepto de límite utilizamos en cada momento de nuestro quehacer de la vida diario, para un mecánico que fabrica pistones, "tan cerca"puede signifi-*

car milésimos, centímetros, pulgadas de su diámetro del piston. Para los astrónomos "tan proximo"puede significar la medida de años de luz, el recorrido de la radiación solar durante el año en el sistema planetario, galaxias o distancia recorrida de la radiación solar a la tierra y a otras planetas durante el año, significa "aproximadamente o cerca"de nuestro planeta tierra en distancia.
Para un técnico agricultor "tan próximo o cerca"puede significar instantes o periodos para realizar el traslado de las plántulas del almácigo a terrenos fijos para su crecimiento y rendimiento como planta independiente o "tan próximo"significaría el uso adecuado de insecticidas para la fumigación de plantas frutales o plantas medicinales según los pisos ecológicos para tener una buena aproximación de cosecha o producción.
Para un técnico forestal "tan cerca o próximo"puede significar tiempo mínimo para la regeneración de plantas maderables o no maderables, después del incendio forestal, o tiempo de vida que tienen plantas maderables una vez talada, también "tan cerca"significaría años de vida observando el número de anillos del árbol talado, determinación del volumen del árbol en pie para su comercialización o transformación en el corto y mediano largo plazo de manera sostenida, pero preservando la especie para las futuras generación en nuestro planeta tierra.
Para un técnico agroindustrial "tan cerca o próximo"significaría tiempo de conservación y preservación de productos agrícolas, agropecuarios, para su comercialización o grado de acidez que alcanza las frutas de la región según pisos ecológicos, o grado de fermentación en alcohol de las frutas después del proceso de trasformación, esto es el límite de preservación y conservación de productos con valor agregado para la comercialización y exportación.
Para un economista "tan cerca o próximo"significa resolver la demanda y oferta de la población consumidora de la producción de ciertos artículos de primera necesidad, es una aproximación máxima teórica a la que está empeñada una fábrica para producir dichos artículos, es un límite, que en la práctica nunca se logra alcanzarlo satisfacer las multiples necesidades de la humanidad; pero a la cual es posible aproximarse.

Definición 1.5 (Concepción heurística de aproximación infinitesimal) *El concepto de límite de una función real, ha sido una de las más arduas tareas para los matemáticos en la historia de análisis matemático. El límite es una cantidad escalar, a la cual una razón de cantidades en movimiento se aproxima continuamente, más que* *cualquier diferencia dada y no puede alcanzarla y sobrepasarla antes que las cantidades hayan decrecido indefinidamente. El aporte de Newton,I. (1660) fue para calcular razón de cambio instantáneo es decir cálculo de la velocidad, distancias, problemas de tangentes y cuadraturas. El concepto de límite va abriendo un paso, imprescindible de la ardua tarea de modelar y sistematizar el fundamento de la idea de aproximarse a un valor tan cercano como lo especifique y aún nunca se logra alcanzarlo constituye la esencia del concepto de limite, [4],[19].*

La primera definición de límite aparece en la obra de Wallis,J. (1616-1703), expresa y utiliza por primera el símbolo denotado por ∞. Afirma el paso de límite no es una operación matemática, sino un método heurístico que conduce a hallazgos gracias al razonamiento lógico basado en inducción incompleta. D´Alembert (1717-1783), sostiene y perfecciona ésta definición, usando explícitamente la palabra límite de una cantidad variable visto como una cantidad fija a la cual se acerca tanto como se quiera. Se dice que una cantidad es el límite de otra cantidad cuando la segunda puede aproximarse a la primera tal cerca como una cantidad dada, tan pequeña como se puede suponer, sin que la cantidad que se acerca pueda sobrepasar a la cantidad que se acerca, la diferencia de una semejante cantidad a su límite es absolutamente inasignable. Cauchy, L. (1665) define muy parecida a la que utilizamos en la actualidad, es decir, la concepción numérica dinámica infinitesimal. Çuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite". La definición de Cauchy hacía uso de expresiones tales como: valores sucesivos, aproximarse indefinidamente y diferir tanto como uno quiera y define $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$, [21].

El concepto era lógico, le faltaba la formalidad matemática y aquí la contribución de Weierstrass,K. (1770) consolida y permite dar una definición sólida y formal de límite de una función real, nos proporciona un concepto fundamental para estudiar y analizar el comportamiento de las funciones reales, cuando la variable independiente x suficientemente tan cerca a x_0, dando como resultado si la función $f(x)$ tiende al número arbitrariamente a L, y se denota: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x en el dominio de la función D_f se cumple $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esta definición $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ es el laborioso resultado de más de cientos de años de intentos explicaciones formales teóricas de muchos matemáticos y significa la completa rigorización del concepto de límite de una función

real $f(x)$, toma un valor L, cuando la cantidad x variable independiente se aproxima a un valor tan cercano x_0 por derecha y por la izquierda.
Por consiguiente el límite de una función real $f(x)$, se aproxima suficientemente al valor L, con tal de considerar todo los valores de x suficientemente tan próximo al número x_0. Esto establece un concepto formal y bien definido en un punto x_0 de la vecindad abierta de números reales, cuyas aplicaciones y operaciones sirven para dar una demostración formal del operador limite a funciones reales de valor real, funciones vectoriales etc.

Definición 1.6 (Definición formal de límite) *Sea una función real de valores reales $f : A \to \mathbb{R}$, definida en $A \subseteq \mathbb{R}$. El número L_0, es límite de una función real $f(x)$ en el punto x_0 (no necesariamente del dominio) cuando el valor absoluto de la diferencia entre los valores de $f(x)$ y L_0 se puede hacerse tan pequeño como se quiera, con tal de considerar los valores de x es suficientemente tan próximo al número de x_0, es decir, la definición de limite establece a que los valores de la función $f(x)$ se aproxima a L_0, conforme x se aproxima al número elegido x_0, si el valor absoluto de la diferencia de $|x - x_0| \to 0$ entonces el valor absoluto de la diferencia de $|f(x) - f(x_0)| \to 0$, la expresión matemática es, [7]:*
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x en el dominio de la función D_f se cumple $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ y la representación gráfica es, [3], [4]:

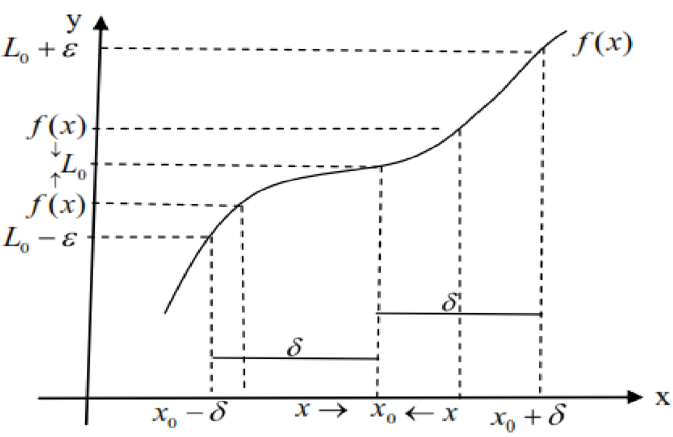


Figura 1.5: Límites de funciones reales

En lenguaje más simple: es posible encontrar o tener la función real $f(x)$ definida arbitrariamente en un intervalo de la recta real tan próximo a L, desde que se tome $x \in A$ suficiente próximo del valor real x_0 con $x \neq x_0$.

Ejemplo 1.2.2 *Analizar el comportamiento de la función* $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 19$, *para todo* x *muy próximos a* $x = -2$ *por la izquierda y por derecha.*

Solución:

Se presenta la gráfica en valores de x muy cercanos a -2 aproximación por la izquierda y derecha con su respectivo imagen de $f(x)$ para cada $x \in D_f = \mathbb{R}$ y la figura 1.6.

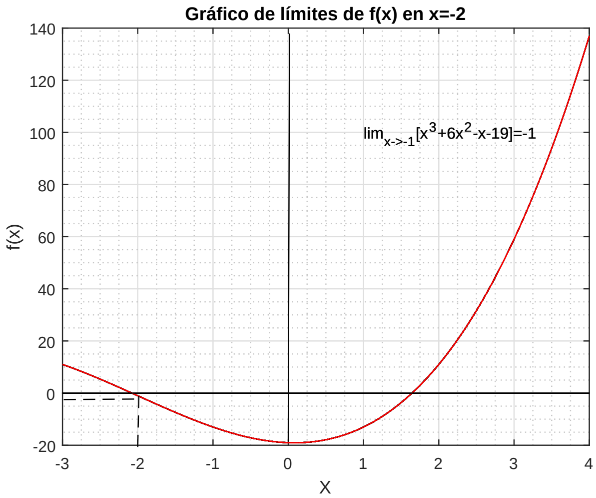


Figura 1.6: Límite de función $f(x)$ en $x = -2$

En la figura mostrada $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 19$, es función cúbica de modo que el punto $(-2, -1)$, explica la existencia de un agujero sobre la curva $f(x)$, está claro que la función no está bien definida para $x = -2$ y podemos calcular el valor de la función tan cercano como queramos resultando $f(-2) = -1$, eligiendo valores muy cercanos $x = -2$ por la derecha e izquierda. Los estudiantes universitarios del área de ciencias e ingeniería muchas veces, intentan aprender y asimilar el concepto formal de limites de funciones reales, para valores muy próximos $x \to -2$.

Analíticamente aplicamos el operador límite a la función $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 19$ cuando $x \to -2$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} (x^3 + 6x^2 - x - 19) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 2 - 19 = -1$$

Ejemplo 1.2.3 *Analizar el comportamiento de la función* $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 14x^2 + 9x - 9}{x - 3}$, *para los valores muy próximos a* $x = 3$ *por la izquierda y por derecha.*

Solución:

Se presenta la siguiente tabla de valores de x muy próximos a 3 por la derecha e izquierda con su respectivo imagen de valores numéricos $f(x)$ para todo el dominio de la función real $x \in D_f = R - \{3\}$, y la figura 1.7.

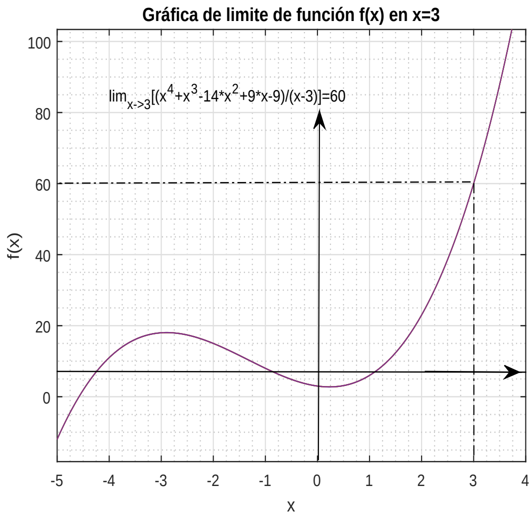


Figura 1.7: Límites de función en $x = 3$

La función simplificada $f(x)$ es una función cubica, el punto $(3, 60)$, explica la existencia de un agujero sobre la curva $f(x)$, está claro que la función no está bien definida en $x = 3$. Hallamos el valor tan cercano de la función $f(x)$ para valores muy cercanos $x \to 3$ y resulta 60.

Analíticamente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^4 + x^3 - 14x^2 + 9x - 9}{x - 3}\right)\\
&= \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x^3 + 4x^2 - 2x + 3)}{x - 3}\right)\\
&= \lim_{x\to 3}(x^3 + 4x^2 - 2x + 3)\\
&= 60
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4 *Calcule el valor numérico de las siguientes funciones compuesto en limite, definidas en los puntos de acumulación respectivamente. En la figura 1.8*

1. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *y*
6. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

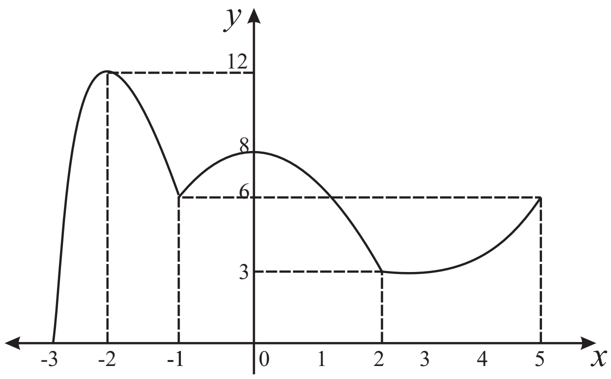


Figura 1.8: Representación gráfica de funciones por tramos

Solución:

Según el gráfico mostrado se tiene los límites de las funciones dadas:

1. $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 12$
3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 6$
4. $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$
6. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 6$

Ejemplo 1.2.5 *Analizar el comportamiento de la función real definida mediante, en toda la recta real excepto* 2*:*

$$f(x) = \frac{5x^3 - 28x^2 + 33x + 18}{x^4 - 11x^3 - 20x^2 + 39x + 9}$$

Para valores cercanos muy cercanos $x = 2$ *por la izquierda y por la derecha.*

Solución:

Se presenta tabla de valores de la función $f(x)$ para valores muy cercanos a $x = 2$.

Hallamos el valor de la función $f(x)$ cuando $x \to 2$ por la derecha e izquierda usando el método de Newton I.(1665), método de aproximaciones para valores de x y resulta $f(2) = \frac{4}{5}$.

Ahora aplicamos el operador limite a la función

$$f(x) = \frac{5x^3 - 28x^2 + 33x + 18}{x^4 - 11x^3 - 20x^2 + 39x + 9}$$

cuando $x \to 2$ método analítico establecida por Weierstrass, K.(1700).

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^3 - 28x^2 + 33x + 18}{x^4 - 11x^3 - 20x^2 + 39x + 9}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-3).(5x^2 - 13x - 6)}{x^4 - 11x^3 - 20x^2 + 39x + 9}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-3).(5x^2 - 13x - 6)}{x^4 - 11x^3 - 20x^2 + 39x + 9} = -\frac{12}{65} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\frac{12}{65}$.

Presentamos la representación gráfica de la función real sobre su dominio.

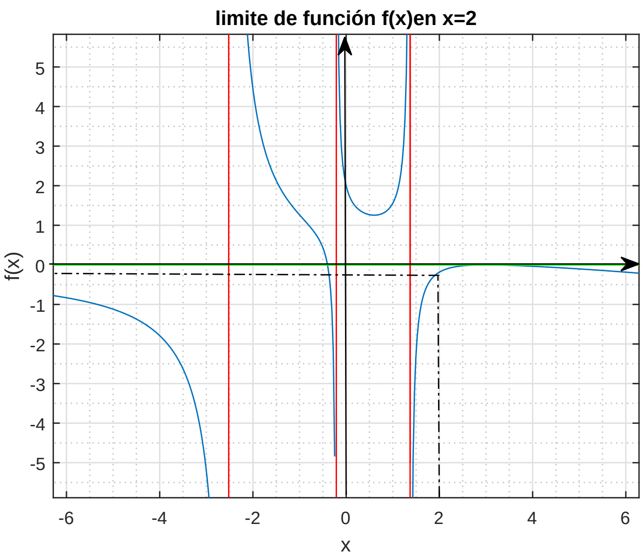


Figura 1.9: Límites de funciones reales

Ejemplo 1.2.6 *Analizar el comportamiento de la función real definida* $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 3}{x^2 - 9}$ *en toda la recta real* $x \in R - \{-3, 3\}$, *para valores cercanos muy cercanos* $x = -3$ *por la izquierda y por la derecha.*

Solución:

Aplicamos el operador limite a la función real $f(x)$ cuando $x \to -3$ método analítico establecida por Weierstrass, K.(1700).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} f(x) &= \lim_{x\to -3} \frac{x^3+6x^2+10x+3}{x^2-9} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3).(x^2+3x+1)}{(x+3)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{(x^2+3x+1)}{(x-3)} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Observamos el límite de la función $f(x)$ es un número $-\dfrac{1}{6}$ cuando el valor de x sea tan próximo al numero $x = -3$, representación gráfica.

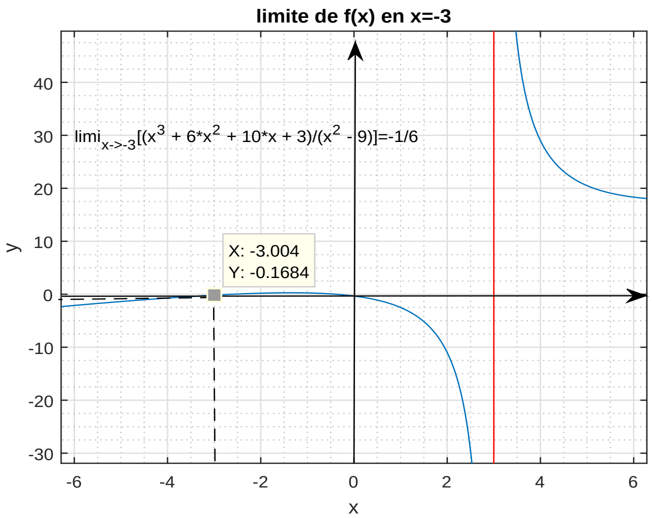


Figura 1.10: Limites de funciones reales

Ejemplo 1.2.7 *Analizar el comportamiento de la función real definida* $f(x) = \dfrac{x^2-9x+8}{\sqrt{4x+12}-4}$ *en toda la recta real* $x \in R - \{1\}$*. Para valores cercanos muy cercanos* $x = 1$ *por la izquierda y por la derecha.*

Solución:

Aplicamos el operador limite a la función real $f(x)$ cuando $x \to 1$ método analítico establecida por Weierstrass, K.(1700).

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9x+8}{\sqrt{4x+12}-4}$ multiplicando con la conjugada $(\sqrt{4x+12}-4)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-8)(x-1)(\sqrt{4x+12}+4)}{4(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-8)(\sqrt{4x+12}+4)}{4} \\ \therefore \quad \lim_{x\to 1} f(x) &= -14 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.8 *Halle el límite de la función real* $f(x) = \dfrac{4x^4+9x^3+3x^2-5x-3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x}$ *en* $x=-1$

Solución:

Los factores primos de función numerador y denominador método de Ruffini, esto es:
$4x^4+9x^3+3x^2-5x-3 = (x+1)^3(4x-3)$ es la función del numerador.
$3x^4+9x^3+9x^2+3x = 3x(x+1)^3$ es la función del denominador.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{4x^4+9x^3+3x^2-5x-3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3(4x-3)}{3x(x+1)^3} \\ \therefore \quad \lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{4x-3}{3x} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

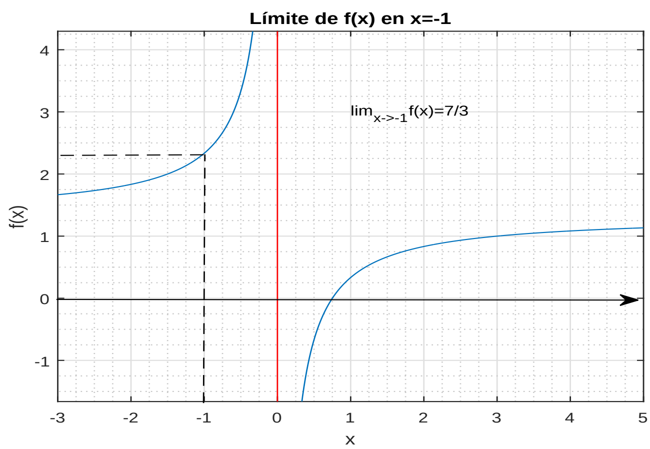


Figura 1.11: Limites de funciones reales

Ejemplo 1.2.9 *Halle el limite de la función real definida* $f(x) = \dfrac{x^3-27}{2x^2-7x+3}$ *en todo valor real de* x *muy cercanos a* 3.

Solución:

La función del numerador es un polinomio cúbico, mientras el numerador es un polinomio cuadrático entonces usamos diferencia de cubos y método de aspa simple para el denominador y se tiene:

$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ polinomio numerador.

$2x^2 - 7x + 3 = (x-3)(2x-1)$ polinomio numerador.

Aplicando a cada miembro el operador límite y resulta:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{2x^2-7x+3}$$

Representación gráfica de la función puesto en límite (figura 1.12), tenemos.

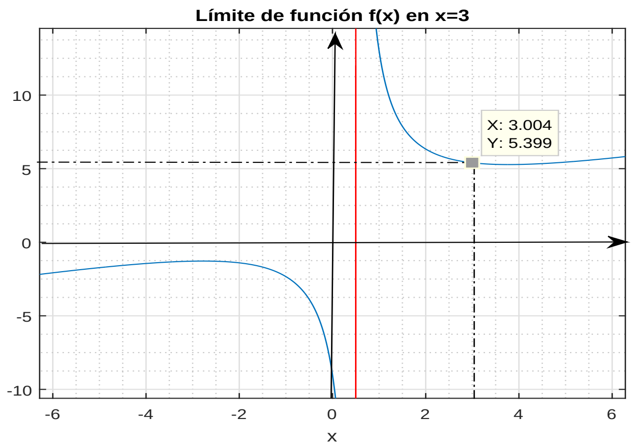


Figura 1.12: Limites de funciones reales

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{2x^2-7x+3} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(2x-1)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+3x+9)}{(2x-1)} = \frac{27}{5} \\
\therefore \quad \lim_{x\to 3} f(x) &= \frac{27}{5}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.10 *Halle el límite de la función real* $f(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x^2 - 1}$ *en* $x = 1$

Solución:

Para hallar el límite de $f(x)$ en todo valor real muy cercano al punto $x = 1$, utilizamos propiedades del álgebra como productos notables para el polinomio del denominador, mientras para el polinomio numerador de cuarto grado primero descomponer en factores primos utilizando el método de Ruffini y resulta:

$2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3 = (x-1)(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)$ polinomio numerador.

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ polinomio del denominador.Representación gráfica de la función real definida $f(x)$.

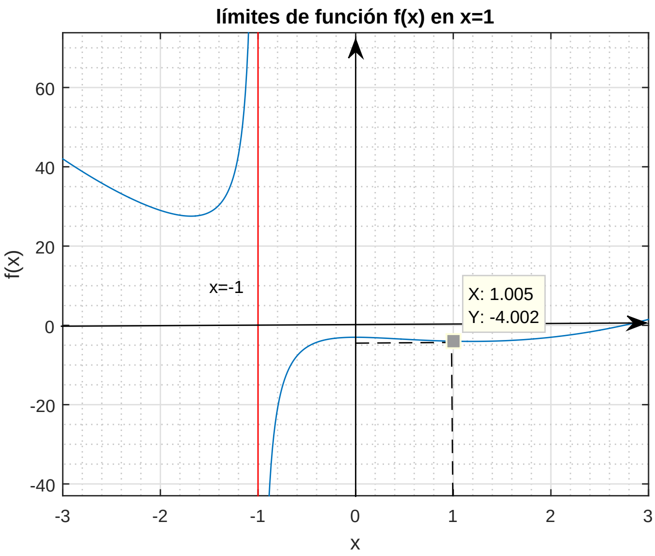


Figura 1.13: Limites de funciones reales

Aplicando el operador límite a cada miembro y resulta:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x^2 - 1} \\
\lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)}{(x-1)(x+1)}
\end{aligned}
$$

Eliminado términos iguales del denominador y numerador y resulta.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{(2x^3-4x^2-3x-3)}{(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(2x^3-4x^2-3x-3)}{(x+1)} = -\frac{8}{2}\\ \therefore\quad \lim_{x\to 1} f(x) &= -4\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.11 *Halle el limite de la función* $f(x) = \dfrac{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x}{3x^7+4x^6-7x^5+5x^4-2x^3-2x-1}$ *en* $x = 1$

Solución:

Descomponer en factores primos numerador y denominador:

$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x = x(x-1)(x^4+x^2+1)$ polinomio numerador.

$3x^7+4x^6-7x^5+5x^4-2x^3-2x-1 = (x-1)(3x^6+7x^5+5x^3+3x^2+3x+1)$ polinomio denominador.

Reemplazando estos resultados y aplicando el operador limite a cada miembro , esto es:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x}{3x^7+4x^6-7x^5+5x^4-2x^3-2x-1}\\ \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^4+x^2+1)}{(x-1)(3x^6+7x^5+5x^3+3x^2+3x+1}\end{aligned}$$

Simplificando términos iguales en el denominador y numerador.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x(x^4+x^2+1)}{(3x^6+7x^5+5x^3+3x^2+3x+1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x(x^4+x^2+1)}{(3x^6+7x^5+5x^3+3x^2+3x+1} = \frac{3}{22}\\ \therefore\quad \lim_{x\to 1} f(x) &= \frac{3}{22}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.12 *Halle el límite de la función radical* $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x+1}+4x-1}{\sqrt{x^2-3}-1}$ *en* $x = 3$

Solución:

Representación gráfica es, Figura 1.14, desarrollando y aplicando propiedades de radicales para la función radical cociente no es necesario llevar a las formas indeterminadas, puesto que $f(3)$ existe, entonces aplicamos el operador límite a.

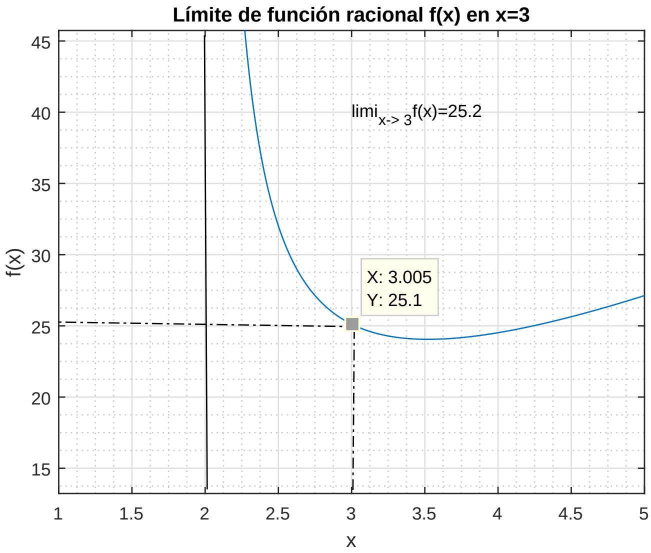


Figura 1.14: Límites de funciones reales

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x+1} + 4x - 1}{\sqrt{x^2-3}-1}$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x+1} + 4x - 1}{\sqrt{x^2-3}-1}$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{(3)^2\sqrt{3+6} - \sqrt[3]{3+1} + 12 - 1}{\sqrt{(3)^2-3}-1}$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = 25.2$$

1.3. Método general para encontrar δ

Tenemos de la definición formal de límite de una función real $f(x)$ para valores x muy cercanos a x_0, Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x en el dominio de la función D_f se cumple:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

1ro Se descompone $|f(x) - L_0|$, en dos factores , uno de ellos debe ser $|x - x_0|$, es decir: $|f(x) - L_0| \leq \|h(x)\||x - x_0|$

2do Acotar la función $|h(x)| \leq M$, para todo $x \in D_f$. Se elige un valor arbitrario que satisfaga la relación $|a - x_0| > \delta_1$ la diferencia entre la asíntota a y x_0, en particular se puede considerar como:
$\delta_1 = \dfrac{1}{2}|a - x_0|$. Si hay varias asíntotas se toman las diferencias de ellos con x_0, con todas las asíntotas, luego se elige el menor de ellos y se toma δ_1 a la mitad del menor.

3ro Si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in D_f$ entonces $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si $|f(x) - L_0| = |h(x).(x - x_0)| \leq |h(x)||x - x_0| \leq M|x - x_0| \leq M\delta_2$, entonces $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{M}$

4to Se elige $\delta = \text{mín}[\delta_1, \delta_2]$ es menor que δ_1 y δ_2 existen y deben ser mayores que cero. Por lo tanto$\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, se comprueba que tal que para todo $x \in D_f$ entonces $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, [6], [23].

Ejemplo 1.3.1 *Usando la definición de límite de funciones reales demuestre que:*

$$\lim_{x \to 5}(x^3 + x^2 - 2x) = 140$$

Demostración:

1ro Si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$ entonces $0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |f(x) - 140| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Si } |f(x) - 5| &\doteq |x^3 + x^2 - 2x - 140| \\ &\leq |x^2 + 6x + 28||x - 5| \\ &\leq M|x - 5| \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{1.1}$$

2do Acotar la función:$|x^2 + 6x + 28| \leq M$, consideramos un valor de $\delta_1 = 1$ esto implica los siguiente $|x - 5| < 1$ además $\Rightarrow -1 < x - 5 < 1 \Rightarrow 4 < x < 6$ $\Rightarrow 24 < 6x < 36$ sumando a la desigualdad 28 resulta:

$$2 < 6x + 28 < 645 \tag{1.2}$$

3ro Sabemos que:

$$4 < x < 6 \Rightarrow 16 < x^2 < 36 \tag{1.3}$$

sumando miembro a miembro de (1.2) y (1.3) resulta $52 + 16 < x^2 + 6x + 28 < 64 + 36$ entonces $68 < x^2 + 6x + 28 < 100 = M$ reemplazando este resultado en la ecuación (1.1).

4to Si $|f(x)-5| = |x^3+x^2-2x-140| \leq |x^2+6x+28||x-5| \leq 100.|x-5| \leq \delta_2 100 = \varepsilon$ entonces $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{100}$

Finalmente elegimos $\delta = \text{mín}[\delta_1, \delta_2] = \text{mín}[1, \dfrac{\varepsilon}{100}]$, existe y es mayor que cero.

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 5}(x^3 + x^2 - 2x) = 140$

La representación geométrica de $\lim\limits_{x\to 5}(x^3 + x^2 - 2x) = 140$.

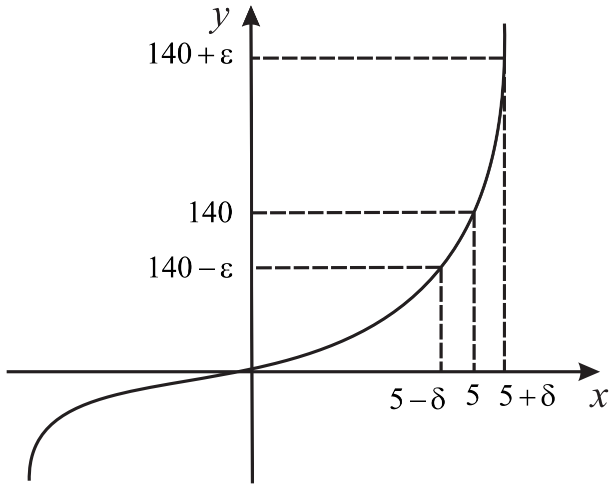


Figura 1.15: Límites de funciones reales

Ejemplo 1.3.2 *Usando la definición de límite de funciones reales demuestre que:*

$$\lim_{x\to -2}(3x^3 - 2x^2 + 2x - 3) = -39$$

.

Demostración:

Representación geométrica y utilizando la definición del operador límite para una función real, esto es, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ entonces $\mid f(x) - l_0 \mid \leq \epsilon$, en todo $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}$, esto es.

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

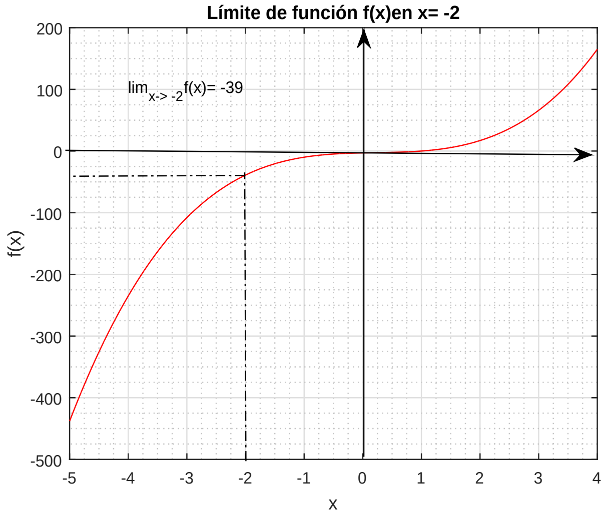


Figura 1.16: Límites de funciones reales

1ro Si $\lim\limits_{x\to -2}(3x^3 - 2x^2 + 2x - 3) = -39 \Leftrightarrow$ para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$ entonces $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |f(x) + 39| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\text{Si } |f(x)+39| &= |3x^3 - 2x^2 + 2x + 36| \\
&\leq |3x^2 - 8x + 18||x+2| \\
&\leq M|x+2| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned} \tag{1.4}$$

2do Acotar la función:$|3x^2 - 8x + 18| \leq M$, consideramos un valor de $\delta_1 = 1$ entonces $|x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow 24 > -8x > 8$ sumando a la desigualdad 18 resulta:

$$42 < 18 - 8x+ > 26 \tag{1.5}$$

3ro Sabemos que $-3 < x < -1 \Rightarrow 9 > x^2 > 1$ luego

$$3 < 3x^2 < 27 \tag{1.6}$$

sumando miembro a miembro de (1.5) y (1.6) resulta, la función acotada entre limite inferior y limite superior:

$29 < 3x^2 - 8x + 18 < 69 = M$ entonces reemplazando este resultado en la ecuación (1.4).

4to si $|f(x)+2| =\leq |x^2-8x+18||x+2| \leq 69|x+2| \leq \delta_2 69 \doteq \varepsilon$ entonces $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{69}$.

Finalmente elegimos $\delta = \text{mín}[\delta_1, \delta_2] = \text{mín}[1, \dfrac{\varepsilon}{69}]$, existe y es mayor que cero.
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to -2}(3x^3 - 2x^2 + 2x - 3) = -39$$

Ejemplo 1.3.3 *Usando la definición de límite de funciones reales demuestre que:*

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10}\right) = -\frac{3}{7}$$

Demostración:

1ro Si $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10} = -\frac{3}{7}$, $\Leftrightarrow$ para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $x \in D_f$ $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |f(x) + \dfrac{3}{7}| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Si } \left|f(x)+\frac{3}{7}\right| &= \left|\frac{10(x+2)}{7(x-5)}\right| \\ &\leq \frac{3}{7}\left|\frac{1}{x-5}\right||x+2| \\ &\leq M|x+2| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{1.7}$$

2do Acotar la función: $\left|\dfrac{1}{x-5}\right| \leq M$, consideramos un valor de $\delta_1 = \dfrac{1}{2}|x_0 - a| = \dfrac{1}{2}|-2-5| = \dfrac{7}{5}$, entonces $|x+2| < \dfrac{7}{2} \Rightarrow -\dfrac{7}{2} < x+2 < \dfrac{7}{2}$
$-\dfrac{21}{2} < x-5 < -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{7} > \dfrac{-1}{x-5} < \dfrac{2}{21}$
la desigualdad resulta:

$$\left|\frac{1}{x-5}\right| \leq \frac{2}{7} = M \tag{1.8}$$

3ro Si $|f(x) + \dfrac{3}{7}| = \dfrac{10}{7}|\dfrac{x+2}{x-5}| \leq \dfrac{10}{7}|\dfrac{1}{x-5}| \leq \dfrac{10}{7}\delta_2\dfrac{2}{7} \leq \varepsilon$ entonces $\delta_2 = \dfrac{49\varepsilon}{20}$

Finalmente elegimos $\delta = \text{mín}[\delta_1, \delta_2] = \text{mín}[1, \dfrac{49\varepsilon}{20}]$, existe y es mayor que cero.

Por lo tanto: $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10}\right) = -\frac{3}{7}$

4to Representación geométrica de $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x-10}\right) = -\frac{3}{7}$

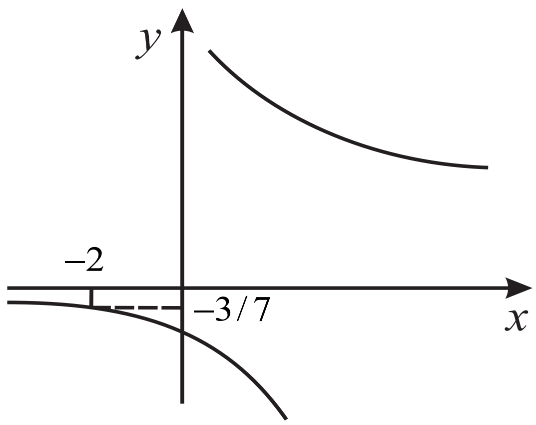


Figura 1.17: Limites de funciones reales

Ejemplo 1.3.4 *Usando la definición de límite de funciones reales demuestre que:*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{3x^3+11x^2+x-15}\right)=\frac{1}{32}$$

Demostración:

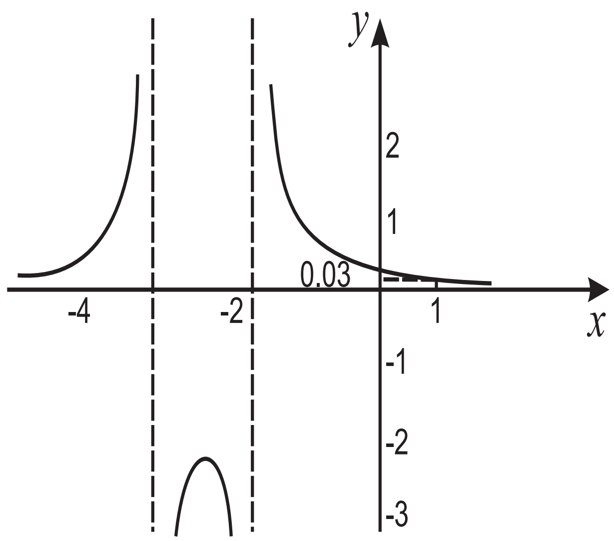


Figura 1.18: Límites de funciones reales

1ro Si $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{3x^3+11x^2+x-15}\right)=\frac{1}{32} \Leftrightarrow$ para todo $\epsilon > 0$

existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$ entonces $0 < |x-1| < \delta$
$|f(x) - \frac{1}{32}| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\text{Si } \left|f(x)-\frac{1}{32}\right| &= \left|\frac{(x+1)(3x+17)(x-1)}{32(3x+5)(x+3)}\right| \\
&\leq \frac{1}{32}\left|\frac{(x+1)(3x+17)}{(3x+5)(x+3)}\right||x-1| \\
&\leq M|x-1| \\
&\leq \varepsilon \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

2do Acotar la función: $\left|\dfrac{(x+1)(3x+17)}{32(x+3)(3x+5)}\right| \leq M$, consideramos los valores de $\delta = \dfrac{1}{2}|x_0 - a|$ donde a son las asíntotas y sea $\delta_1 = \dfrac{1}{2}|1+3| = \dfrac{4}{2} = 2$
$\delta_2 = \dfrac{1}{2}|1+\dfrac{5}{3}| = \dfrac{4}{3}$ entonces el menor de ellos es $|x-1| < \dfrac{4}{3}$
$\Rightarrow -\dfrac{4}{3} < x-1 < \dfrac{4}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$
por propiedad de valor absoluto $\Rightarrow -1 < 3x < 7$ a la desigualdad sumar 17 entonces resulta $16 < 3x+17 < 24$ así queda:

$$|3x+17| \leq 24 \qquad (1.10)$$

3ro Ahora $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$ sumar a la desigualdad 1 y resulta $\dfrac{2}{3} < x+1 < \dfrac{10}{3}$ entonces

$$|x+1| \leq \frac{10}{3} \qquad (1.11)$$

4to Como $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$ sumando a la desigualdad 5 y multiplicando 3 resulta $4 < 3x+5 < 12$ entonces $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{3x+5} > \dfrac{1}{12}$

$$\left|\frac{1}{3x+5}\right| \leq \frac{1}{4} \qquad (1.12)$$

5to Similar $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$ sumar a la desigualdad 3 y resulta
$\dfrac{8}{3} < x+3 < \dfrac{16}{3}$ invirtiendo $\dfrac{3}{8} > \dfrac{1}{x+3} > \dfrac{3}{16}$

$$\frac{1}{|x+3|} \leq \frac{3}{8} \qquad (1.13)$$

De (1.10), (1.11), (1.12) y (1.13) reemplazando en (1.9)

6to Si $|f(x) - \frac{1}{32}| = \frac{|x+1||3x+17||x-1|}{32|3x+5||x+3|} \leq \frac{15}{2}\delta_3 = \varepsilon$
entonces $\delta_3 = \frac{15\varepsilon}{2}$

Finalmente elegimos $\delta = \text{mín}[\delta_1, \delta_2, \delta_3] = \text{mín}[\frac{4}{3}, \frac{15\varepsilon}{2}]$, existe y es mayor que cero, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{32(3x^3+11x^2+x-15)}\right) = \frac{1}{32}$$

Ejemplo 1.3.5 *Usando la definición de límite de funciones reales demuestre que:*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-4x^2-3x-3}{x+1}\right) = -4$$

Demostración:

1ro Si $\lim_{x\to 1}(\frac{2x^3-4x^2-3x-3}{x+1}) = -4 \Leftrightarrow$ para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$ entonces $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Si } |f(x)+4| &= \left|\frac{(x-1)(2x^2-2x-1)}{(x+1)}\right| \\ &\leq \frac{|x-1||2x^2-2x-1|}{|x+1|}| \\ &\leq M|x-1| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{1.14}$$

2do Acotar la función cociente:$|\frac{(2x^2-2x-1)}{(x+1)}| \leq M$

Considerar el valor de $\delta = \frac{1}{2}|x_0 - a|$ donde a son las asíntotas y sea:
$\delta_1 = \frac{1}{2}|1+1| = \frac{2}{2} = 1$ entonces $|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ por propiedad de valor absoluto $\Rightarrow 0 > -2x > -4$ a la desigualdad restar -1 entonces resulta $-1 > -2x-1 > -3$ así queda.

$$-3 < -2x - 1 < -1 \tag{1.15}$$

3ro Si $\Rightarrow 0 < x < 2$ a la desigualdad elevando al cuadrado y multiplicando por 2 resulta

$$0 < 2x^2 < 8 \tag{1.16}$$

Entonces sumando miembro a miembro (1.15) y (1.16) $-3 < 2x^2 - 2x - 1 < 3$ así queda

$$|2x^2 - 2x - 1| \leq 7 \tag{1.17}$$

4to Tenemos que $0 < x < 2$ sumar a la desigualdad 1 y resulta $1 < x + 1 < 3$ entonces invirtiendo

$1 > \dfrac{1}{|x+1|}| > \dfrac{1}{3}$ entonces

$$\frac{1}{|x+1|} \leq 1 \tag{1.18}$$

5to $|f(x)+4| = |\dfrac{(x-1)(2x^2-2x-1)}{(x+1)}| \leq \dfrac{|x-1||2x^2-2x-1|}{|x+1|}| \leq 7\delta_2 = \varepsilon$

$\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{7}$.

Finalmente elegimos $\delta = \text{mín}[\delta_1, \delta_2] = \text{mín}[1, \dfrac{\varepsilon}{7}]$, existe y es mayor que cero.

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2x^3-4x^2-3x-3}{x+1}) = -4$

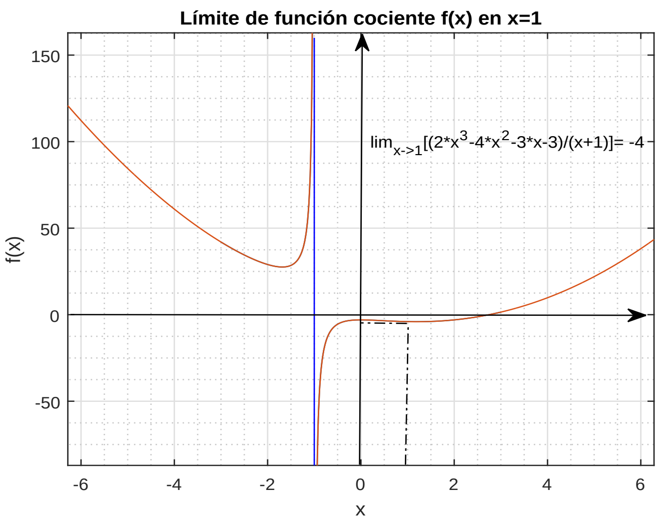


Figura 1.19: Límites de funciones reales

1.3.1. Ejercicios propuestos

Usando la definición formal de límites de funciones reales demostrar los siguientes.

1. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{2x^2-5x+2}) = -1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2x^3-4x^2-3x-3}{x+1}) = -4$

3. $\lim\limits_{x\to -2}(\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+5x^2+2x-8x+1}) = -\dfrac{1}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^3+3x^2-11x-6) = 42$

5. $\lim_{x\to 2}(\frac{3x^3+x^2-4x-20}{x^2-4}) = 9$

6. $\lim_{x\to -3}(\frac{x^3+6x^2+10x+3}{x^2-9}) = -\frac{1}{6}$

7. $\lim_{x\to 2}(2x^4-3x^3+3x+10) = 24$

8. $\lim_{x\to -2}(\frac{x^2-x+3}{x-1}) = -3$

9. $\lim_{x\to 1}(\frac{3x}{2x^2-5x+7}) = \frac{3}{5}$

10. $\lim_{x\to 1}(\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}) = \frac{1}{2}$

11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-10x+8}{x-2} = 6$

Teorema 1.3.1 (Teorema de unicidad de límite) *El limite de una función real $f(x)$ existe y es único.*

Sean $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

Demostración: Es suficiente demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ y debemos considerar $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$.
Si $|L_2 - L_1| = |L_2 - f(x) + g(x) - L_1| \leq (|L_2 - f(x)| + |g(x) - L_1|)$.
Tomemos para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y existe δ_2 tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ entonces

$$|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y existe δ_1 tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ entonces

$$|g(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalmente:

$$|L_2 - L_1| = |L_2 - f(x) + g(x) - L_1| \leq |L_2 - f(x)| + |g(x) - L_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

esto implica $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta = min[\delta_1, \delta_2]$, existe y es mayor que cero entonces para todo $\varepsilon > 0$ verifica que $L_1 = L_2$.

Teorema 1.3.2 (Teorema de desigualdad de límite) *Sean las funciones real $f(x)$ y $g(x)$, con la condición $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in D_f \supset D_g$ con $x \neq x_0$, además se tiene $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ entonces $L \leq M$.*

Demostración:
Supongamos que no es cierto la tesis. Si $L \geq M$ entonces $L - M \geq 0$

1ro veamos que $\varepsilon = \dfrac{L-M}{2} > 0$, de modo que existe número positivo $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

2do veamos que $\varepsilon = \dfrac{L-M}{2} > 0$, de modo que existe número positivo $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ entonces $|g(x) - M| < \varepsilon \Rightarrow M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon$.

3ro Elegir un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta = min[\delta_1, \delta_2]$, existe y es mayor que cero entonces para todo $\varepsilon > 0$ verifica por hipótesis $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ entonces $M - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) \leq L + \varepsilon$ resulta que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} (g(x) - f(x)) \leq 0$ por lo tanto $(g(x) - f(x)) \leq 0$ esto es una contradicción a la hipótesis $g(x) \leq f(x)$ y por consiguiente debe cumplirse $L \leq M$.

1.4. Propiedades de límites de funciones reales

Sean las funciones reales $f(x)$ y $g(x)$ definidas como $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ y k una función constante y verifican las siguientes propiedades, [4], [21]:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (k_0 f(x)) = k_0 \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k_0 L$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \div g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \div \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \div M$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{1/n} = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{1/n} = [L]^{1/n}$

7. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(g(x))] = N$ siempre que $N = g(M)$

Observación: En algunos operaciones sobre límites de funciones reales no es posible aplicar directamente con facilidad las propiedades de límites en especial en límites de función cociente, función producto, función exponente de base e u otra base a real tanto función logarítmica, valor absoluto etc., ya que presentan la forma indeterminada, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{0}{0}$$

Se afirma la función cociente no está bien definida en x_0. En estos casos especiales se hace necesario realizar primero las operaciones algebraicas, racionalización, factorización, uso de propiedades logarítmicas, propiedades de productos notables o cocientes notables y propiedades de valor absoluto, propiedades de funciones trigonométricas, propiedades de funciones logarítmicas, propiedad de funciones exponenciales, entre otros, para calcular el limite de funciones reales, [4], [13].

Ejemplo 1.4.1

Halle el límite de la función real:

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 2}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = -1$ y resulta.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1} h(x) &= \lim_{x \to -1} \frac{4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 2} \\
\lim_{x \to -1} h(x) &= \frac{4(-1)^4 + 9(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5(-1) - 3}{(-1)^5 + 3(-1)^4 + 5(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2} = \frac{12 - 12}{-12 + 12} \\
\lim_{x \to -1} h(x) &= \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Presenta una cantidad indeterminada, es decir la función $h(x)$ no está bien definida para $x = -1$

2do Realizando la factorización de los polinomios reales numerador y denominador:

$$4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^3(4x - 3)$$

y el polinomio denominador por métodos de descomponer en factores primos y se tiene:

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 2 = (x+1)^3(x^2+2)$$

reemplazando los factores primos de los polinomios numerador y denominador y resulta.

3ro Si $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 6x + 2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^3(4x-3)}{(x+1)^3(x^2+2)}$

$\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(4x-3)}{(x^2+2)} = -\dfrac{7}{3}$ entonces $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = -\dfrac{7}{3}$

Ejemplo 1.4.2 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 8x - 12}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 2$ y resulta.

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 8x - 12}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12}$$

$$h(2) = \frac{(2)^4 + 2(2)^3 - (2)^2 - 8(2) - 12}{(2)^4 - 2(2)^3 - (2)^2 + 16 - 12} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 2$

2do Descomponer la función cociente el numerador y denominador:

$x^4 + 2x^3 - x^2 - 8x - 12 = (x-2)(x^3 + 4x^2 + 7x + 6)$

y la función $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = (x-2)(x^3 - x + 6)$ reemplazando los factores primos de los polinomios numerador y denominador y resulta.

3ro Si $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2).(x^3 + 4x^2 + 7x + 6)}{(x-2).(x^3 - x + 6)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 7x + 6}{x^3 - x + 6}$

$\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 7x + 6}{x^3 - x + 6} = \dfrac{44}{12}$ entonces $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \dfrac{11}{3}$

Ejemplo 1.4.3 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{80} - 2x^{40} + 1}{x^{40} - 2x^{20} + 1}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 1$ y resulta.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{80} - 2x^{40} + 1}{x^{40} - 2x^{20} + 1}$$

$$h(1) = \frac{1^{80} - 2(1)^{40} + 1}{1^{40} - 2(1)^{20} + 1} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 1$

2do Hacer cambio de variable de la función cociente el numerador y denominador: $y = x^{20} \Rightarrow y^2 = x^{40} \Rightarrow y^4 = x^{80}$ por consiguiente $y \to 1$

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{80} - 2x^{40} + 1}{x^{40} - 2x^{20} + 1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{y\to 1} \frac{(y^2-1)^2}{(y-1)^2} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2.(y+1)^2}{(y-1)^2} = \lim_{y\to 1}(y+1)^2 = 4$$

Ejemplo 1.4.4 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{102} - x^{70} + 2x^{24} - 2}{x^{99} - 4x^{59} + 3}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 1$ y resulta.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{102} - x^{70} + 2x^{24} - 2}{x^{99} - 4x^{59} + 3}$$

$$h(1) = \frac{1^{102} - 1^{70} + 2(1)^{24} - 2}{1^{99} - 4(1)^{59} + 3} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 1$

2do usar propiedades de cocientes notables:

$$\begin{aligned}
x^n - 1 &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^3 + x^2 + x + 1) \text{ para } n \text{ entero positivo.} \\
x^{102} - 1 &= (x-1)(x^{101} + x^{100} + x^{99} + \cdots + x^3 + x^2 + x + 1) \\
x^{99} - 1 &= (x-1)(x^{98} + x^{97} + x^{96} + \cdots + x^3 + x^2 + x + 1) \\
x^{70} - 1 &= (x-1)(x^{69} + x^{68} + x^{67} + \cdots + x^3 + x^2 + x + 1) \\
x^{59} - 1 &= (x-1)(x^{58} + x^{57} + x^{56} + \cdots + x^3 + x^2 + x + 1) \\
x^{24} - 1 &= (x-1)(x^{23} + x^{22} + x^{21} + \cdots + x^3 + x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

3ro Ordenando a la función $h(x) = \dfrac{(x^{102}-1)-(x^{70}-1)+2(x^{24}-1)}{(x^{99}-1)-4(x^{59}-1)}$

$$h(x) = \frac{(x-1)(x^{101}+\cdots+1)-(x-1)(x^{69}+\cdots+1)+2(x-1)(x^{23}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{98}+\cdots+1)-4(x-1)(x^{58}+\cdots+1)}$$

aplicando la propiedad de cancelación del factor común (x-1) del numerador y el denominador y resulta cuando $x \to 1$.

4to Aplicar el método analítico establecido por Weierstrass, K.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^{101}+\cdots+1)-(x^{69}+\cdots+1)+2(x^{23}+\cdots+1)}{(x^{98}+x^{97}+\cdots+1)-4(x^{58}+x^{57}+\cdots+1)} \\
\lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(102)-(70)+2(24)}{(99)-4(59)} = -\frac{80}{137}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.5 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x^2+3x-3}-\sqrt[3]{4x^2+5x-8}}{\sqrt{x^2+9x+6}-\sqrt[3]{10x^2+32x+22}}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 1$ y resulta.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \frac{\sqrt[4]{x^2+3x-3}-\sqrt[3]{4x^2+5x-8}}{\sqrt{x^2+9x+6}-\sqrt[3]{10x^2+32x+22}} = \frac{1-1}{4-4} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 1$

2do Consideremos las propiedades de racionalización.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) &= a-b \\
(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) &= a-b \\
(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) &= a+b \\
(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2.b}+\sqrt[4]{a.b^2}+\sqrt[4]{b^3}) &= a-b \\
(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2.b}+\sqrt[4]{a.b^2}-\sqrt[4]{b^3}) &= a-b
\end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{(\sqrt[4]{x^2+3x-3}-1)-(\sqrt[3]{4x^2+5x-8}-1)}{(\sqrt{x^2+9x+6}-4)-(\sqrt[3]{10x^2+32x+22}-4)}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt[4]{x^2+3x-3}-1).\frac{FR_1}{FR_1} &= \frac{x^2+3x-3-1}{FR_1} = \frac{(x-1)(x+4)}{FR_1} \\
(\sqrt[3]{4x^2+5x-8}-1).\frac{FR_2}{FR_2} &= \frac{4x^2+5x-8-1}{FR_2} = \frac{(x-1)(4x+9)}{FR_2} \\
(\sqrt[3]{10x^2+32x+22}-4).\frac{FR_3}{FR_3} &= \frac{10x^2+32x+22-64}{FR_3} = \frac{(x-1)(10x+42)}{FR_3} \\
(\sqrt{x^2+9x+6}-4).\frac{FR_4}{FR_4} &= \frac{x^2+9x+6-16}{FR_4} = \frac{(x-1)(x+10)}{FR_4}
\end{aligned}$$

3ro utilizando el método analítico de Weierstrass,K. es decir el operador límite a cada miembro.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[4]{x^2+3x-3}-1)\frac{FR_1}{FR_1} - (\sqrt[3]{4x^2+5x-8}-1)\frac{FR_2}{FR_2}}{(\sqrt{x^2+9x+6}-4)\frac{FR_4}{FR_4} - (\sqrt[3]{10x^2+32x+22}-4)\frac{FR_3}{FR_3}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+4).\frac{x-1}{FR_1} - (4x+9).\frac{x-1}{FR_2}}{(x+10).\frac{x-1}{FR_4} - (10x+42).\frac{x-1}{FR_3}}
\end{aligned}$$

Eliminando factores iguales del numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+4).\frac{1}{FR_1} - (4x+9).\frac{1}{FR_2}}{(x+10).\frac{1}{FR_4} - (10x+42).\frac{1}{FR_3}} = \frac{5/4 - 13/3}{11/8 - 52/48} = -\frac{74}{7}$$

entonces resulta $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\dfrac{74}{7}$

Ejemplo 1.4.6 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{4.\sqrt[3]{2x+4} - 5.\sqrt{x^2+2x+8} + x^3 + 4}{x^4 - \sqrt{x+2} - 5.\sqrt[3]{x^2+4} - 4}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 2$ y resulta.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{4.\sqrt[3]{2x+4} - 5.\sqrt{x^2+2x+8} + x^3 + 4}{x^4 - \sqrt{x+2} - 5.\sqrt[3]{x^2+4} - 4} = \frac{20-20}{16-16} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 2$.

2do Si $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4.(\sqrt[3]{2x+4}-2).\dfrac{FR_1}{FR_1} - 5.(\sqrt{x^2+2x+8}-4).\dfrac{FR_2}{FR_2} + (x^3-8)}{(x^4-16)-(\sqrt{x+2}-2).\dfrac{FR_3}{FR_3} - 5.(\sqrt[3]{x^2+4}-2).\frac{FR_4}{FR_4}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} h(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{8(x-2).\dfrac{1}{FR_1} - 5(x-2)(x+2).\dfrac{1}{FR_2} + (x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+4)(x-2)(x+2)-(x-2)\dfrac{1}{FR_3} - 5(x-2)(x+2)\dfrac{1}{FR_4}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{8\dfrac{1}{FR_1} - 5(x+2)\dfrac{1}{FR_2} + (x^2+2x+4)}{(x^2+4)(x+2) - \dfrac{1}{FR_3} - 5(x+2)\dfrac{1}{FR_4}} = \frac{122}{361}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.7 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3}-3\sqrt{x^2}+3\sqrt{x}-1}{3+2\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^2}}.(x-1)^{-2}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 1$ y resulta.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{64(\sqrt{x^3}-3\sqrt{x^2}+3\sqrt{x}-1)}{(3+2\sqrt{x}-5\sqrt{x^2}).(x-1)^2} = \frac{4-4}{5-5}.\frac{1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 1$

2do Hacemos cambio de variable de $y^6 = x$ con $y \to 1$:

Sea $y^6 = x \Rightarrow y^3 = \sqrt{x} \Rightarrow y^6 = \sqrt{x^2} \Rightarrow y^9 = \sqrt{x^3}$

similar $y^2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y^4 = \sqrt[3]{x^2}$, aplicamos el operador limite a la función $h(y)$ cuando $y \to 1$

3ro Si $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{64(y^9-3y^6+3y^3-1)}{(3+2y^3-5y^6)(y^6-1)^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{64(y^3-1)^3}{(y^3-1)^2(y^3+1)^2(5y^3+3)(y^3-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{64}{(y^3+1)^2(5y^3+3)} \\
&= \frac{64}{32} = 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.8 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

Solución:

1ro $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{1})(1-\sqrt[3]{1})(1-\sqrt[4]{1})\cdots(1-\sqrt[n]{1})}{(1-1)^{n-1}} = \frac{0}{0}$
es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 1$

2do Utilizamos propiedades de racionalización:

$$\begin{aligned}
(1-\sqrt{x}) &= (1-\sqrt{x})\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\\
(1-\sqrt[3]{x}) &= (1-\sqrt[3]{x})\frac{FR_1}{FR_1} = \frac{1-x}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\
(1-\sqrt[4]{x}) &= (1-\sqrt[4]{x})\frac{FR_2}{FR_2} = \frac{1-x}{1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}\\
\vdots &= \vdots\\
(1-\sqrt[n]{x}) &= (1-\sqrt[n]{x})\frac{FR_m}{FR_m} = \frac{1-x}{1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\sqrt[n]{x^3}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}}
\end{aligned}$$

3ro $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-x)(1-x)\cdots(1-x)}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})\cdots(1-x)^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})\cdots}\\
&= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}\\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.9 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}+x^3-2x-6}{x^3-x^2-16x+28}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 2$ y resulta.

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}+x^3-2x-6}{x^3-x^2-16x+20} = \frac{10-10}{36-36} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 2$

2do Usamos propiedades de racionalización y cocientes notables.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} h(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{x^2+4}-2)+(x^3-8)-2(x-2)}{(x^4-16)-(x^2-4)-16(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{x^2+4}-2)\dfrac{FR_1}{FR_1}+(x^3-8)-2(x-2)}{(x^4-16)-(x^2-4)-16(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)\dfrac{1}{FR_1}+(x-2)(x^2+2x+4)-2(x-2)}{(x^2+4)(x-2)(x+2)-(x-2)(x+2)-16(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\frac{1}{FR_1}+(x^2+2x+4)-2}{(x^2+4)(x+2)-(x+2)-16} = \frac{1/3+10}{32-20} \\
&= \frac{31}{36}
\end{aligned}$$

Efectivamente utilizamos las propiedades de racionalización y las propiedades de cocientes notables, por ello es importante saber aplicar las propiedades de limites de funciones reales definidos en su dominio, de modo que la función real cuando $x \to 2$, la función $h(x)$ tiende al valor numérico real $\frac{31}{36}$, esto es,$\lim_{x\to 2} h(x) = \frac{31}{33}$.

Ejemplo 1.4.10 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{2x^2+4x}-\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt{7x+2}-3}{\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[5]{15x+2}-4}$$

Solución:

Efectivamente utilizamos las propiedades de racionalización y las propiedades de cocientes notables, por ello es importante saber aplicar las propiedades de limites de funciones reales definidos en su dominio.

1ro Evaluar a la función cociente $h(x)$ en $x = 2$ y resulta.

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{2x^2+4x}-\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt{7x+2}-3}{\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[5]{15x+2}-4} = \frac{6-6}{4-4} = \frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $h(x)$ no está bien definida para $x = 2$

2do Usamos propiedades de racionalización de expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} h(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[4]{2x^2+4x}-2)-(\sqrt[3]{5x^2+7}-3)+(\sqrt{7x+2}-4)}{(\sqrt[3]{5x-2}-2)+(\sqrt[5]{15x+2}-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[4]{2x^2+4x}-\sqrt[4]{16})\frac{FR_1}{FR_1}-(\sqrt[3]{5x^2+7}-\sqrt[3]{27})\frac{FR_2}{FR_2}+(\sqrt{7x+2}-\sqrt{16})\frac{FR_3}{FR_3}}{(\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt[3]{8})\frac{FR_4}{FR_4}+(\sqrt[5]{15x+2}-\sqrt[5]{32})\frac{FR_5}{FR_5}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2+4x-16)\frac{1}{FR_1}-(5x^2-20)\frac{1}{FR_2}+(7x-14)\frac{1}{FR_3}}{(5x-10)\frac{1}{FR_4}+(15x-30)\frac{1}{FR_5}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(2x+8)(x-2)\frac{1}{FR_1}-5(x-2)(x+2)\frac{1}{FR_2}+7(x-2)\frac{1}{FR_3}}{5(x-2)\frac{1}{FR_4}+15(x-2)\frac{1}{FR_5}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(2x+8)\frac{1}{FR_1}-5(x+2)\frac{1}{FR_2}+7\frac{1}{FR_3}}{5\frac{1}{FR_4}+15\frac{1}{FR_5}} \\
&= \frac{(12)(\frac{1}{32})-(20)(\frac{1}{27})+7(\frac{1}{8})}{5(\frac{1}{12})+15(\frac{1}{80})} = \frac{10/8-20/27}{5/12-3/16} = \frac{110}{99}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.11 *Calcule el limite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[6]{x^2-ax+1}-\sqrt[4]{x^2-a^2+16}-3}{\sqrt[5]{7x^2+a^2}+\sqrt[3]{x^2+x+a}-4}$$

si se sabe que $f(x)=\dfrac{x^3-2a^2x+ax^2}{x^2+2ax}$ *y verifica* $\lim_{x\to 1} f(x)=2a-5$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $f(x)$ en $x=1$ y resulta $f(1)=\dfrac{1-2a^2+a}{2a+1}=2a-5 \Rightarrow 6a^2-9a-6=0$. Entonces $a=2, a=-\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[6]{x^2-2x+1}+\sqrt[4]{x^2-4+16}-3}{\sqrt[5]{7x^2+4}+\sqrt[3]{x^2+x+2}-4}=\frac{3-3}{4-4}=\frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $f(x)$ no está bien definida para $x=2$

2do Usamos propiedades de racionalización de expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[6]{x^2-2x+1}-1)\dfrac{FR_1}{FR_1}+(\sqrt[4]{x^2-4+16}-2)\dfrac{FR_2}{FR_2}}{(\sqrt[5]{7x^2+4}-2)\dfrac{FR_3}{FR_3}+(\sqrt[3]{x^2+x+2}-2)\frac{FR_4}{FR_4}}\\
&= \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{x^2-2x}{FR_1}+\dfrac{x^2-4}{FR_2}}{\dfrac{7x^2-28}{FR_3}+\dfrac{x^2+x-6}{FR_4}} = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{x}{FR_1}+\dfrac{x+2}{FR_2}}{\dfrac{7(x+2)}{FR_3}+\dfrac{x+3}{FR_4}} = \frac{55}{92}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.12 *Calcule el límite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{13x+3}+\sqrt[5]{5x^2-4}-3x^3}{\sqrt[3]{3x^2+5}+\sqrt{x^2+8x}-5}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $f(x)$ en $x=1$ y resulta

$$f(1)=\frac{\sqrt[4]{13x+3}+\sqrt[5]{5x^2-4}-3x^3}{\sqrt[3]{3x^2+5}+\sqrt{x^2+8x}-5}=\frac{3-3}{5-5}=\frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $f(x)$ no está bien definida para $x=1$

2do Usamos propiedades de racionalización de expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{13x+3}-2)\dfrac{FR_1}{FR_1}+(\sqrt[5]{5x^2-4}-1)\dfrac{FR_2}{FR_2}-3(x^3-1)}{(\sqrt[3]{3x^2+5}-2)\dfrac{FR_3}{FR_3}+(\sqrt{x^2+8x}-3)\frac{FR_4}{FR_4}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(13x-13)\frac{1}{FR_1}+(5x^2-5)\dfrac{1}{FR_2}-3(x-1)(x^2+x+1)}{(3x^2-3)\dfrac{1}{FR_3}+(x^2+8x-9)\dfrac{1}{FR_4}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{13(x-1)\frac{1}{FR_1}+5(x+1)(x-1)\dfrac{1}{FR_2}-3(x-1)(x^2+x+1)}{3(x-1)(x+1)\dfrac{1}{FR_3}+(x-1)(x+9)\dfrac{1}{FR_4}}
\end{aligned}$$

3ro Simplificando los términos comunes $(x-1)$ del numerador y denominador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{13(\frac{1}{FR_1})+5(x+1)(\frac{1}{FR_2})-3(x^2+x+1)}{3(x+1)(\frac{1}{FR_3})+(x+9)(\dfrac{1}{FR_4})}\\
&= \frac{\dfrac{13}{32}+\dfrac{10}{5}-3(3)}{\dfrac{6}{12}+\dfrac{10}{6}} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{633}{208}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.13 *Calcule el límite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{5x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2+x+2}-x^3+1}{x^5-3x^4+6x+4}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $f(x)$ en $x=1$ y resulta

$$f(2)=\frac{\sqrt[3]{5x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2+x+2}-x^3+1}{x^5-3x^4+6x+4}=\frac{8-8}{48-48}=\frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $f(x)$ no está bien definida para $x=2$

2do Usamos propiedades de racionalización de expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(\sqrt[3]{5x^2+3x+1}-3)\frac{FR_1}{FR_1}+(\sqrt{3x^2+x+2}-4)\frac{FR_2}{FR_2}-(x^3-8)}{(x^5-32)-3(x^4-16)+6(x-2)}\\
&= \frac{(5x^2+3x-26)\frac{1}{FR_1}+(3x^2+x-14)\frac{1}{FR_2}-(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)-3(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)+6(x-2)}\\
&= \frac{(x-2)(5x+13)\frac{1}{FR_1}+(x-2)(3x+7)\frac{1}{FR_2}-(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)-3(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)+6(x-2)}
\end{aligned}$$

3ro Aplicar el operador limite a la función $f(x)$cuando $x\to 2$, además eliminar términos comunes del numerador y denominador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{(5x+13)\frac{1}{FR_1}+(3x+7)\frac{1}{FR_2}-(x^2+2x+4)}{(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)-3(x^3+2x^2+4x+8)+6}\\
&= \frac{\frac{23}{27}+\frac{13}{8}-12}{80-3(32)+6}\\
&= 0.952
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.14 *Calcule el límite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{13x+3}+\sqrt[5]{4x-5}+(x^2-2)}{\sqrt[3]{3x^2+5}+x^3-3}$$

Solución:

1ro Evaluar a la función cociente $f(x)$ en $x=1$ y resulta:

$$f(1)=\frac{\sqrt[4]{13+3}+\sqrt[5]{-1}+1-2}{\sqrt[3]{3+5}+1-3}=\frac{3-3}{3-3}=\frac{0}{0}$$

es una cantidad indeterminada, esto significa que la función $f(x)$ no está bien definida para $x=1$

2do Usamos propiedades de racionalización de expresiones algebraicas.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[4]{13x+3}-2)+(\sqrt[5]{4x-5}+1)+(x^2-1)}{(\sqrt[3]{3x^2+5}-2)+(x^3-1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(13x-3)\dfrac{1}{FR_1}+(4x-4)\frac{1}{RF_2}+(x-1)(x+1)}{(3x^2-3)\dfrac{1}{FR_3}+(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

3ro Aplicar el operador limite a la función $f(x)$cuando $x \to 1$, además eliminar términos comunes del numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{13\dfrac{1}{FR_1}+4\dfrac{1}{FR_2}+(x+1)}{3(x+1)\dfrac{1}{FR_3}+(x^2+x+1)}$$

$$\begin{aligned}FR_1 &= (\sqrt[4]{(13x+3)^3}+\sqrt[4]{(13x+3)^2*16}+\sqrt[4]{(13x+3)*16^2}+\sqrt[4]{(16)^3})_{x=1} = 32\\ FR_2 &= (\sqrt[5]{(4x-5)^4}-\sqrt[5]{(4x-5)^3}+\sqrt[5]{(4x-5)^2}-\sqrt[5]{(4x-5)}+1)_{x=1} = 5\\ FR_3 &= (\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}+\sqrt[3]{(3x^2+5)*8}+\sqrt[3]{(8^2)})_{x=1} = 12\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{13}{32}+\dfrac{4}{5}+2}{\dfrac{6}{12}+(3)} = 0.92$$

1.4.1. Ejercicios propuestos

Halle los límites finitos de las funciones reales $f(x)$ definidas en su dominio respectivo en x_0.

1. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{10x^5-11x^4-2x^3+14x^2-16x+5}{3x^8-x^5-5x+3} = \dfrac{6}{7}$
2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{7x^{61}-2x^{41}+x^{23}+3x^7+3}{3x^{71}-2x^{51}-1} = -\dfrac{19}{111}$
3. $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \dfrac{x^5-2x^3+5x^2+3x+2}{x^4-2x^2+3x-2} = -\dfrac{13}{7}$
4. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{4\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt{x}-3x^3-4\sqrt[5]{x}}{6\sqrt[4]{x}+3\sqrt{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}-5x-1} = -\dfrac{1}{20}$
5. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{6\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3x^3+1}-2\sqrt{4x+5}-2x^2}{3\sqrt[3]{2x^2+6}+\sqrt{4x^2-5x+10}-3\sqrt{4x^2+5x+7}+3x^2} = \dfrac{22}{135}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - x + \sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{4x} - \sqrt{3x+10} + x^2 - 2} = \dfrac{32}{95}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1} + 4\sqrt[5]{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1} - 4x^2}{\sqrt[4]{2x-1} - 5\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{2x-1} + 3x^2} = -\dfrac{187}{125}$

8. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[5]{x^2+7x+2} + \sqrt[4]{5x+1} - \sqrt{x-2} - x}{\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[4]{3x-8} - x + 1} = -\dfrac{567}{200}$

9. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[5]{7x+4} - 10\sqrt[4]{3x+4} + x^2 + 2}{\sqrt[3]{2x} + 4\sqrt{x-3} - 6} = \dfrac{33}{10}$

10. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^7 + 15x^6 + 18x^5 + 9x^4 + x^3 + 9x^2 + 16x + 7}{3x^7 + x^6 - 12x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 16x - 7} = 10$

11. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{11} - 2x^4 + 3x^2 - 6x + 3}{2x^7 - 3x^5 - 2x^2} = \dfrac{3}{8}$

12. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{6-3x+2x^2} - \sqrt{x^2-4x+8} + x^2 - 4}{-\sqrt[3]{x^3+2x-4} + 3x - x^2} = -\dfrac{25}{13}$

13. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^5 - 4x^4 - 25x^3 + 171x^2 - 324x + 189}{x^6 - 14x^5 + 71x^4 - 147x^3 + 54x^2 + 189x - 162} = -\dfrac{17}{25}$

14. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 + 9x^3 + 17x^2 - 8x - 28}{x^5 - x^4 - 17x^3 - 18x^2 + 20x + 24} = -\dfrac{13}{20}$

15. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 29x^3 + 70x^2 - 76x + 24}{2x^6 - 10x^5 + 12x^4 + 13x^3 - 46x^2 + 60x - 49} = \dfrac{29}{19}$

16. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x^7 + 27x^6 + 88x^5 + 143x^4 + 168x^3 + 54x^2 - 351x - 324}{2x^6 + 25x^5 + 111x^4 + 196x^3 + 90x^2 + 27x + 189} = \dfrac{297}{34}$

17. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^6 + 8x^5 + 7x^4 + 19x^3 + 106x^2 + 164x + 72}{3x^6 + 18x^5 + 41x^4 + 61x^3 + 102x^2 + 124x + 56} = \dfrac{37}{27}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5x^2-4} - \sqrt[3]{3x^2+2x+3} + 2x^3 - 1}{x^{23} - 2x^{17} + 3x^9 - -2} = \dfrac{31}{48}$

19. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4\sqrt[3]{2x^2} - 5\sqrt{8x} - x^2 + 16}{x^3 - 4\sqrt{2x} - 5\sqrt[3]{2x^2} + 10} = -\dfrac{19}{20}$

20. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x+1} - 2\sqrt{4x+5}}{3\sqrt[3]{2x^2+6} + \sqrt{4x^2-5x+10} - 3\sqrt{4x^2+5x+7} + 3x^3} = \dfrac{2}{15}$

21. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x}{3x^7 + 4x^6 - 7x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 2x - 1} = \dfrac{3}{20}$

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{74} - 3x^{54} - x^{23} + 3x^2}{2x^{27} + x^{12} - 3x^3} = -\dfrac{35}{19}$

23. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x^2-8} - x\sqrt[3]{x+6} + x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = 10.32$

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+7}}{\sqrt{x} + \sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+13}} = \dfrac{22}{19}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 3\sqrt{x^2-x+4} + 4(x+1)^2}{x^3 - 2x} = \dfrac{5}{12}$

1.5. Límites laterales de funciones reales

Para la existencia de límite de una función real en un punto de acumulación, implica que los valores de los limite laterales para la aproximación por la izquierda y aproximación por la derecha deben ser iguales $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, es decir, depende del comportamiento de la función $f(x)$ cuando x tiende al valor muy cercano x_0, tanto para todo los valores de $x < x_0$ esto es, aproximación por la izquierda de x_0 y para todo los valores de $x > x_0$ aproximación por la derecha de x_0. Presentamos la siguiente figura, para la interpretación de aproximaciones.
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow$ existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ denominado limite lateral de modo que los limites laterales son iguales para la aproximación por la izquierda y derecha de x hacia x_0, caso contrario el limite lateral no existe, [7], [13], [10].

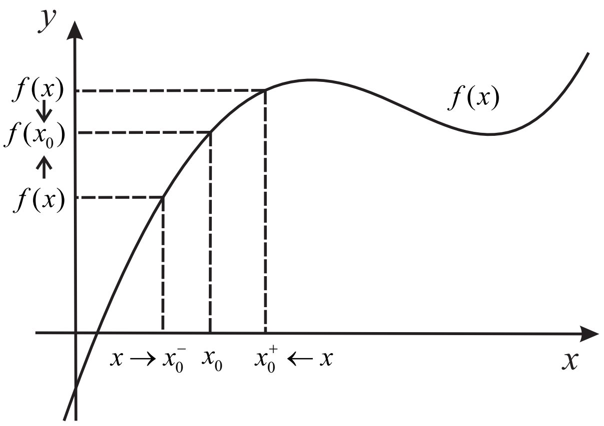


Figura 1.20: Límites laterales de la función $f(x)$ en x_0

Definición 1.7 (Límite lateral por la izquierda) *Dada la función real $f(x)$ definida en el intervalo $\langle c, x_0\rangle$. El limite de la función real $f(x)$ cuando x se aproxima a*

x_0 por la izquierda, es el numero L_1 , es decir, expresada matemáticamente de forma rigurosa y formal.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 \Leftrightarrow$ *Para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que $x_0 - \delta < x < x_0$ en el dominio de la función $f(x)$ y se cumple $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,[7], [8].*

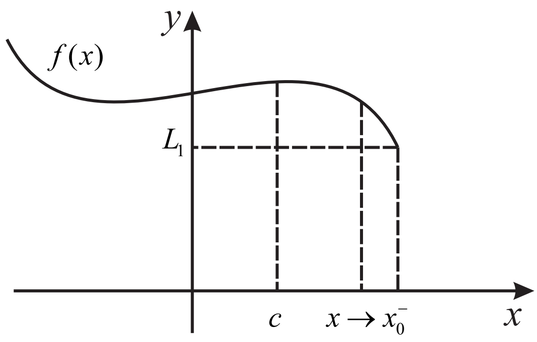


Figura 1.21: Límite lateral de la función $f(x)$ por la izquierda

Definición 1.8 (Limite lateral por la derecha) *Dada la función real $f(x)$ definida en el intervalo $\langle x_0, d\rangle$. El limite de la función real $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 por la derecha, es el numero L_2 , es decir, expresada matemáticamente de forma rigurosa y formal.*

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2 \Leftrightarrow$ *Para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta$ en el dominio de la función $f(x)$ y se cumple $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, [7], [8].*

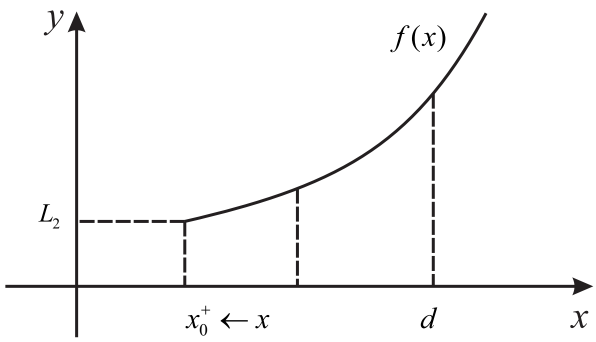


Figura 1.22: Límite lateral de la función f(x) por la derecha

Observación:

1. Si $x \to x_0^-$, significa que x tiende a x_0 desde el lado negativo,esto implica x toma valores estrictamente menores que x_0, esto es $x < x_0$.

2. Si$x \to x_0^+$, significa que x tiende a x_0 desde el lado positivo, esto implica x toma valores estrictamente mayores que x_0, esto es $x > x_0$.

3. Para que exista el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ debe cumplir la condición, los limites laterales por la derecha, tanto por la izquierda deber ser iguales para $x \to x_0$ es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)$ existe

4. No existe el límite de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ en los siguientes casos:

   a) Cuando el límite de la función $f(x)$ en $x \to x_0$ esto es, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe o limites son valores distintos.

   b) Cuando uno de los límites laterales no existe: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = L_1, \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = \pm\infty$ no existe o limites son valores distintos o viceversa.
   Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe en los siguientes casos:

   - Cuando no existen uno de los limites laterales ó
   - Cuando los límites laterales existen y sean diferentes, esto implica, los límites laterales son diferentes o no existen para esta aproximación tanto por la derecha y izquierda.

Ejemplo 1.5.1 *Calcule el límite si existe* $\lim\limits_{x \to x_2} f(x)$ *definida por la siguiente función por tramos:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & x \leq 2 \\ x^3 + 3x + 3 & x > 2 \end{cases}$$

Solución:
Aplicamos la definición de límites laterales para $f(x)$ cuando $x \to 2$
Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

1. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x^2 + 5) = 17$.

2. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 + 3x + 3) = 17$.

3. De los resultados 1) y 2) establecemos que los limites laterales de $f(x)$ existen para valores muy cercanos a $x = 2$ por la derecha y izquierda, esto es: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 17$

4. Representación gráfica de la función por tramos.

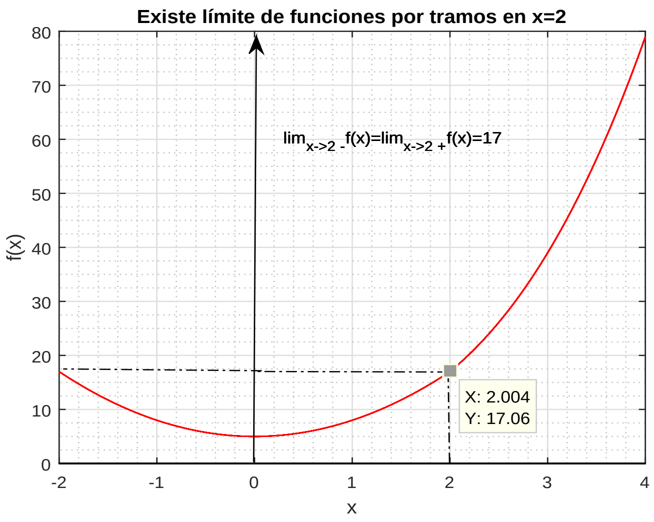


Figura 1.23: Limites laterales son iguales de $f(2) = 17$

Ejemplo 1.5.2 *Halle si existe el límite* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *donde la función por tramos se define:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \leq 2 \\ 2x+3 & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

Condición del criterio de límites laterales, esto es:

Si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = L$

Veamos si $x \leq 2$ entonces $x \to 2^-$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+3) = 7$

Veamos si $x > 2$ entonces $x \to 2^+$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x+3) = 7$

Claramente se observa los limites laterales de $f(x)$ en $x = 2$ son iguales, esto es: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 7 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ existe.

Representación gráfica de la función por tramos:

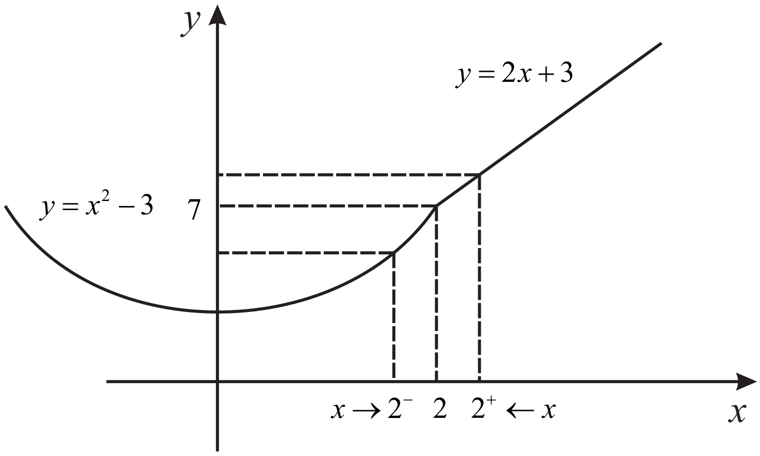


Figura 1.24: Límites laterales son iguales de $f(2) = 7$

Ejemplo 1.5.3 *Calcule el limite si existe* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *definida mediante la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} & x \le 1 \\[2ex] \dfrac{x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}}{5(1-\sqrt[4]{x})} & x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos la definición de limites laterales para $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda y derecha

1. Si, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}}{5(1-\sqrt[4]{x})} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\dfrac{(1-x)(2x+1)(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})}{10(1-\sqrt[4]{x})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})} = -\dfrac{6}{5}$

2. Si, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-\sqrt[5]{x})(1+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \cdot \frac{FR_1}{FR_2} \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4})} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

3. De 1) y 2) resultan los límites laterales para $f(x)$ no son iguales en x muy cercanos a 1 por la derecha e izquierda y esto es: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Ejemplo 1.5.4 *Halle los valores de a , b de modo que el límite de la función existe en $x = 1$ y $x = 2$ para la función definida por tramos y grafique:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \leq 1 \\ 2ax - b & 1 < x \leq 2 \\ x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

1. Existe el límite de la función $f(x)$ para $x = 1$, esto es:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} f(x) \\ \lim_{x \to 1^-} (ax^2 + bx + 1) &= \lim_{x \to 1^+} (2ax - b) \end{aligned}$$

   entonces

$$a - 2b = 1 \tag{1.19}$$

2. Existe el límite de la función $f(x)$ para $x = 2$, esto es:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} f(x) \\ \lim_{x \to 2^-} (2ax - b) &= \lim_{x \to 2^+} (x + 4) \end{aligned}$$

   entonces

$$4a - b = 6 \tag{1.20}$$

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (1.19) y (1.20): $a = \dfrac{11}{7}$ y $b = \dfrac{2}{7}$

4. La función respectiva es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{11}{7}x^2 + \dfrac{2}{7}x + 1 & x \leq 1 \\ \dfrac{22}{7}x - \dfrac{2}{7} & 1 < x \leq 2 \\ x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

5. Los límites laterales de las funciones por tramos $f(x)$ si existen en $x = 1$ y $x = 2$ estos son:

   Si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{20}{7}$ entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{20}{7}$ existe.

   Si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 6$ entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$ existe.

Representación gráfica de funciones por tramos en $x = 1$ y $x = 2$.

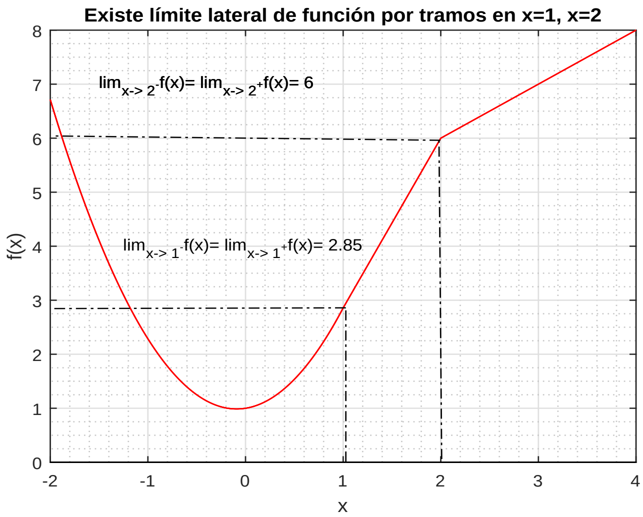


Figura 1.25: Límites laterales de $f(x)$ son iguales en $x = 1$ y $x = 2$

Ejemplo 1.5.5 *Halle el límite de la función por tramos si existe o no, en* $x = -0.38$, $x = 0.8$ *y* $x = 1.5$ *para la función definida por tramos y grafique:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + 3x^2 + 4 & -2 < x \leq -0.38 \\ -3x^2 + 4x + 6 & -0.38 < x \leq 0.8 \\ -6 & 0.8 < x \leq 1.5 \\ x^2/2 & x > 1.5 \end{cases}$$

Solución:

1. Analizamos la función por tramos en $x = -0.38$, esto es:

   - Si $x \leq -0.38$ entonces $\lim\limits_{x \to -0.38^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -0.38^-} (3x^3 + 3x^2 + 4) = 4.268584$
   - Si $x > -0.38$ entonces $\lim\limits_{x \to -0.38^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -0.38^+} (-3x^2 + 4x + 6) = 4.0468$

   Por tanto los limites laterales son diferentes y esto implica que no existe el $\lim\limits_{x \to -0.38} f(x)$

2. Analizamos la función por tramos en $x = 0.8$, esto es:

   - Si $x \leq 0.8$ entonces $\lim\limits_{x \to 0.8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0.8^-} (-3x^2 + 3x + 6) =$

- Si $x > 0.8$ entonces $\lim\limits_{x\to 0.8^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0.8^+} (-6) = -6$

Por tanto los límites laterales de la función por tramos existen pero no son iguales, entonces $\lim\limits_{x\to 0.8} f(x)$ no existe.

3. Analizamos la función por tramos en $x = 1.5$, esto es:

- Si $x \le 1.5$ entonces $\lim\limits_{x\to 1.5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1.5^-} (-6) = -6$
- Si $x > 1.5$ entonces $\lim\limits_{x\to 1.5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1.5^+} \dfrac{x^2}{2} = 1.125$

Por tanto los límites laterales de la función por tramos existen pero no son iguales, entonces $\lim\limits_{x\to 1.5} f(x)$ no existe y la representación geométrica.

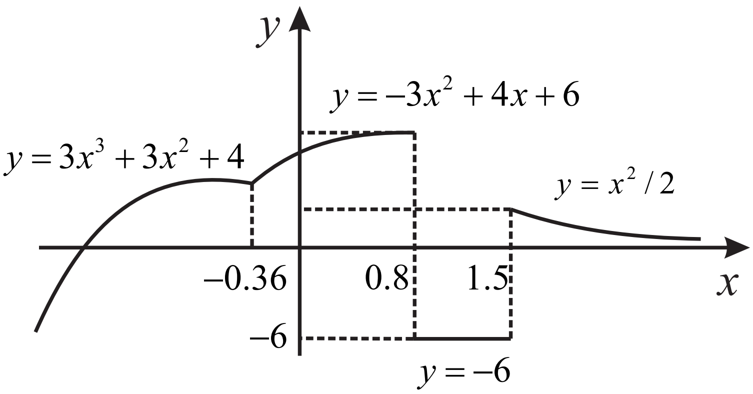


Figura 1.26: Límite lateral $f(x)$ existe en $x = -0.38$ y no existen $x = 0.8$ y $x = 1.5$

1.5.1. Ejercicios propuestos

Calcular los límites finitos o limites laterales de la $f(x)$ definidas en su dominio.

1. Halle si existe el límite de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{|x^2 - 4x + 4|}$; Rpta: Si existe límite

2. Halle si existe el limite de $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ definida como. Rpta: Existe limite de $f(x)$ en $x = 5$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} & x \le 5 \\ \dfrac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 25} & x > 5 \end{cases}$$

3. Halle si existe el limite de $\lim\limits_{x\to 0.4} f(x)$ definida como. Rpta: No existe el limite de $f(x)$ en $x = 0.4$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 5x + 8 & x \leq 0.4 \\ x^3 + 2x^2 + x + 5 & x > 0.4 \end{cases}$$

4. Diga si existe el límite $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{|x^2 - 4|}$; Rpta: No existe

5. Diga si existe el límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + |2x - 3| + 2}{|x^2 - 1|}$; Rpta: No existe

6. Halle los valores de a y b, de modo que existe el limite de la función $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 2$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & x \leq 1 \\ 2ax - 3b & 1 < x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

7. Calcule el limite si existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 2 & x \leq 2 \\ 3x^3 - x^2 - 11 & x > 2 \end{cases}$$

8. Calcule el límite si existe de $f(x)$ en $x = 2$ y $x = 4$ donde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 2 \\ x & 2 \leq x < 4 \\ 8 - x & x \geq 4 \end{cases}$$

9. Calcule el limite si existe y halle los valores de a y b en la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x-2)}{x^3 + x^2 - 4x - 4} & x < 2 \\ \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2ax + 1} & 2 \leq x < 4 \\ \dfrac{2x^3 - 8x^2 - bx + 44}{x^2 - 7x - 4} & x \geq 4 \end{cases}$$

10. Calcule el límite si existe de la siguiente función $f(x)$ en $x = 5$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x-10)}{1-\sqrt{x-4}} & x \leq 5 \\ \dfrac{x^2-12x+35}{x^2-25} & x < 5 \end{cases}$$

11. Determine los valores de a y b de modo que existen los límites laterales para la función $f(x)$ en $x = -2$ y $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-4x+4}{x+2} & x < -2 \\ ax^2-2bx+1 & -2 \leq x < 2 \\ \dfrac{ax^2-13x+22}{x-2} & x \geq 2 \end{cases}$$

12. Halle si el límite de la función definido por tramos existe en $x = -1$ además $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x+2} & -2 < x \leq -1 \\ 2x+3 & -1 < x \leq 3 \\ 4x-3 & x > 3 \end{cases}$$

1.6. Límites infinitos e límites al infinito de $f(x)$

Analizar el comportamiento cualitativo y numérica de la función real, establecida por las asíntotas verticales u horizontales que resulten límites infinitos o al infinito equivale a evaluar la función real en un valor muy cercano al punto limite sea finita o muy grande. Pero en muchos casos al hacer estas operaciones con límites existen expresiones indeterminadas, en estos casos utilizamos conceptos de racionalización, factorización, sustitución especial con la finalidad de salvar la cantidad indeterminada de funciones cocientes, potencia en una base numérica etc. El símbolo ∞ se lee infinito es de carácter posicional y no representa ningún número real, si la variable x crece infinitamente para los valores reales positivas y se escribe $x \to +\infty$ y se decrece infinitamente a valores reales negativamente y se escribe $x \to -\infty$
Si $f(x)$ crece infinitamente cuando $x \to x_0$ y se escribe $f(x) \to +\infty$
Si $f(x)$ decrece infinitamente cuando $x \to x_0$ y se escribe $f(x) \to -\infty$

Ejemplo 1.6.1 *Analizar el comportamiento de la función real $f(x)$ utilizando conceptos de límites infinito definida mediante $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+x-6}$ para los valores de x muy cercanos a -3, y para valores muy cercanos a 2*

Solución:

1ro Analizamos en $x=-3$ límites laterales por izquierda y por derecha.

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+3x+5}{(x-3)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+3x+5}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

2do Analizamos en $x=2$ límites laterales por izquierda y derecha.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x+5}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+5}{(x-3)(x-2)} = \infty$$

3ro Representación gráfica:

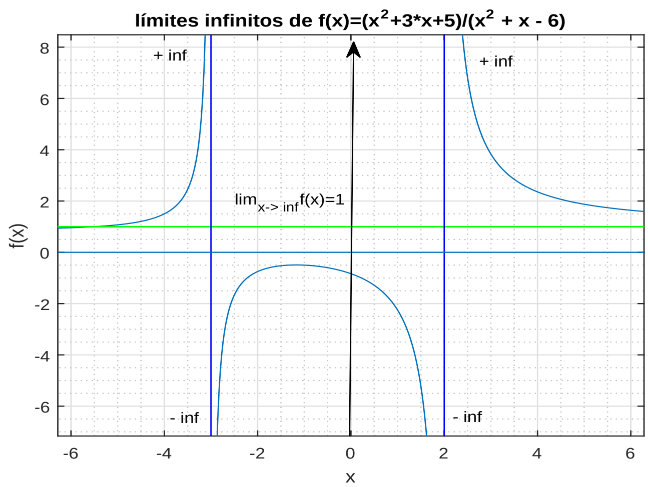


Figura 1.27: Límites infinitos

Cuando x se aproxima a -3 por la izquierda la función $f(x)$ crece infinitamente a $+\infty$ y cuando x se aproxima a -3 por la derecha la función $f(x)$ decrece infinitamente a $-\infty$; así mismo cuando x se aproxima a 2 por la izquierda la función $f(x)$ decrece infinitamente a $-\infty$ y cuando x se aproxima a 2 por la derecha la función $f(x)$ decrece infinitamente a $+\infty$.

Definición 1.9 (Límites infinitos) *Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad abierta de cierto x_0, excepto en x_0 y radio $\delta > 0$. Se dice que una función $f(x)$ crece infinitamente, cuando x se aproxima a x_0 y se expresa mediante: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, esto es, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ dado un $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > N$, [13], [10] .*
Se dice que una función $f(x)$ decrece infinitamente cuando x se aproxima a x_0 y se expresa mediante: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, esto es, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ dado un $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < N$, [13], [10].

Ejemplo 1.6.2 *Analice el comportamiento de la función $f(x)$ para valores muy cercanos a $x = 2$ por la derecha y aproximación por la izquierda de limite infinito definida:*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2-x}$$

Solución:

1ro Al realizar la evaluación de la función en $x = 2$, se obtiene un resultado $\frac{2}{0}$, es una cantidad indeterminada y esto $\frac{2}{0} = \infty$ a continuación hallemos sus limites laterales.

2do Si x se aproxima por la izquierda a 2, entonces el límite infinito de la función $f(x)$ resulta: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2}{2-x} = \frac{+2}{0^+} = +\infty$, porque 0^+ ?, para esto evaluar el denominador para algún $x < 2$, sea $x = 1.5$ entonces resulta $2 - 1.5 = 0.5$ es positiva y sea $x = -1$ resulta el denominador $2 - (-1) = 3$ es positivo, por tanto el denominador siempre sera positiva para cualquier valor $x < 2$.

3ro Si x se aproxima por la derecha hacia 2, entonces el límite infinito resulta: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2}{2-x} = \frac{+2}{0^-} = -\infty$, porque 0^- ?, para esto evaluar el denominador para algún $x > 2$, sea $x = 2.5$ entonces resulta $2 - 2.5 = -0.5$ es un valor negativo y sea $x = 3$ resulta el denominador $2 - (3) = -1$ es negativo, por tanto el

denominador siempre sera negativa para cualquier valor $x > 2$.
$\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{2-x} = \frac{+2}{0^-} = -\infty$

4to Si $x \to 2$ el límite lateral resulta, $\lim_{x\to 2} \frac{2}{2-x} = \frac{+2}{0^-} = \infty$

5to Representación gráfica:

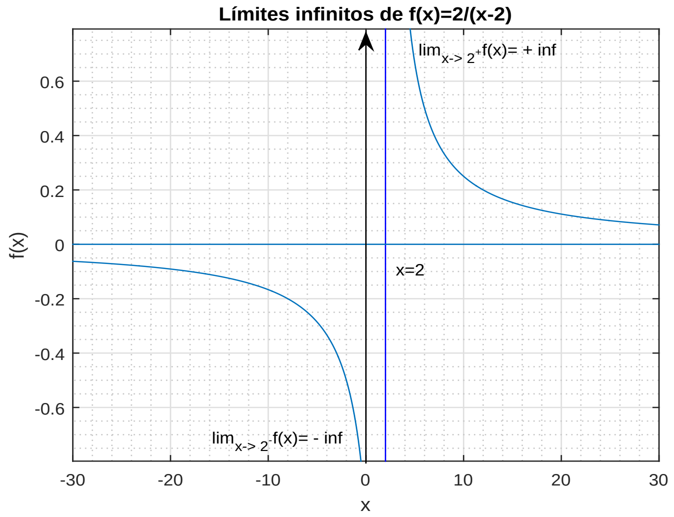


Figura 1.28: Límites infinitos

Ejemplo 1.6.3 *Analice el comportamiento de la función según conceptos de límites infinitos definida por:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 7}{3x^3 - 4x^2 - x + 2}$$

Solución: Descomponer en factores primos los polinomios numerador y denominador por el método de Ruffini, y esto es:
$x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 7 = (x-1)(x^3 + 2x + 7)$ polinomio numerador.

$3x^3 - 4x^2 - x + 2 = (x-1)(3x^2 - x - 2)$ polinomio denominador.

Reemplazado los factores primos se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 7}{3x^3 - 4x^2 - x + 2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3 + 2x + 7)}{(x-1)(3x^3 - x - 2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 + 2x + 7)}{(3x^2 - x - 2)}
\end{aligned}$$

1. Si $x > 1$ entonces $x \to 1^+$ resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^3+2x+7)}{(3x^2-x-2)} = \frac{10}{3-3} \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \frac{10}{3-3} = \frac{10}{0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

2. Si $x < 1$ entonces $x \to 1^-$ resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x^3+2x+7)}{(3x^3-x-2)} = \frac{10}{3-3} \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \frac{10}{3-3} = \frac{10}{0^-} = -\infty
\end{aligned}$$

Cuando x se aproxima por la derecha a 1 la función crece infinitamente, mientras cuando x se acerca por la izquierda a 1, la función decrece infinitamente, esto es: $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$.
Cuando x se aproxima por la izquierda a -0.66 la función crece infinitamente, mientras cuando x se acerca por la izquierda a -0.66, la función decrece infinitamente, esto es: $\lim_{x\to -0.66} f(x) = \pm\infty$.
Representación gráfico de la función definida.

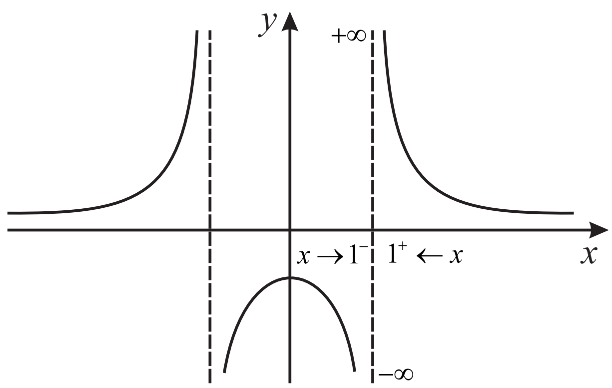


Figura 1.29: Límites infinitos

Ejemplo 1.6.4 *Analizar el comportamiento de la función bajo conceptos de limites infinitos:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-2x^4+3x^2-7x+2}{3x^3-11x^2+8x+4}$$

Solución: Descomponer en factores primos los polinomios denominador y denominador por el método de Ruffini.

$x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(x^4 + 3x - 1)$ polinomio numerador.

$3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = (x-2)(3x^2 - 5x - 2)$ polinomio denominador.

Reemplazando estos factores y simplificando términos iguales, uso del operador limites infinitos resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 2}{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^4 + 3x - 1)}{(x-2)(3x^2 - 5x - 2)} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{x^4 + 3x - 1}{3x^2 - 5x - 2}
\end{aligned}$$

1. Si $x > 2$ entonces $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^4 + 3x - 1}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{21}{12 - 12} = \frac{21}{0^-} = -\infty$

2. Si $x < 2$ entonces $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^4 + 3x - 1}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{21}{12 - 12} = \frac{21}{0^-} = -\infty$

Cuando x se aproxima por la derecha y izquierda hacia 2, la función decrece infinitamente esto es.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{21}{0} = -\infty$$

Representación gráfica de la función:

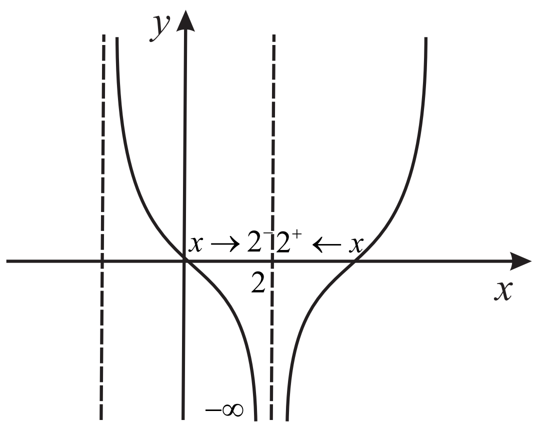


Figura 1.30: Límites infinitos

Definición 1.10 (Límites al infinito) *Sea x tan grande como se quiera positivo o negativo y veamos el valor numérico de la función $f(x)$. Dada la función real definida en un intervalo abierto (a,∞) entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, significa que la función $f(x)$ se aproxima a L cuando $x \to \infty$, esto es, [7], [13]:*
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado un $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ / $x > N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Sea límite de la función $f(x)$ cuando decrece sin límite es el número L y denotaremos
Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado un $\varepsilon > 0$ existe $N < 0$ / $x < N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo 1.6.5 *La población inicial de una colmena es de 5000 abejas. Si el técnico avícola establece el modelo matemático de crecimiento de la población dado por $P(t) = 5000t^2 + 4250t + 5000$ abejas.*

1. *Cuál será la población de abejas al cabo de 5 años*
2. *Cual será la población de abejas inicialmente , esto es, $t = 0$*
3. *Halle razón de cambio instantánea de la población de abejas con respecto al tiempo arbitrario*
4. *Halle razón de cambio instantánea de la población de abejas al cabo de $t = 5$ años*

Solución:

1. Sea la población inicial de abejas en $t = 0$ entonces $P(0) = \lim\limits_{t\to 0}(5000t^2 + 4250t + 5000) = 5000$ abejas.
2. La población de abejas al cabo de $t = 5$ años entonces $P(5) = \lim\limits_{t\to 5}(5000t^2 + 4250t + 5000) = 151250$ abejas.
3. Para determinar razón de cambio de la población de abejas en tiempo arbitrarios es:

$$\begin{aligned}
V'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5000(t+h)^2 + 4250(t+h) + 5000 - 5000t^2 - 4250t - 5000}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10000th + 4250h}{h} \\
&= 10000t + 4250 \text{ abejas/año}
\end{aligned}$$

4. Cantidad de abejas que aumenta al cabo de $t = 5$ años es:
   $V'(5) = (10000t + 4250)|_5 = 54250$ abejas/año.

Ejemplo 1.6.6 *Calcule al infinito de la función definida por* $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+7}$, *cuando* x *crece infinitamente o decrece infinitamente.*

Solución:
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{x+7}$
Factorizamos la variable x de la función numerador y denominador,además por propiedad de limites al infinito y tenemos $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Si $x \to +\infty$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\frac{x}{x} + 2\frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + 7\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{6 + 2\frac{1}{x}}{1 + 7\frac{1}{x}} = 3\end{aligned}$$

Si $x \to -\infty$entonces $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x+2}{x+7} = 3$
Por consiguiente la función $f(x)$ se aproxima tan cerca a 3 cuando x crece o decrece infinitamente.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+7}$ cuando $x \to \pm\infty$

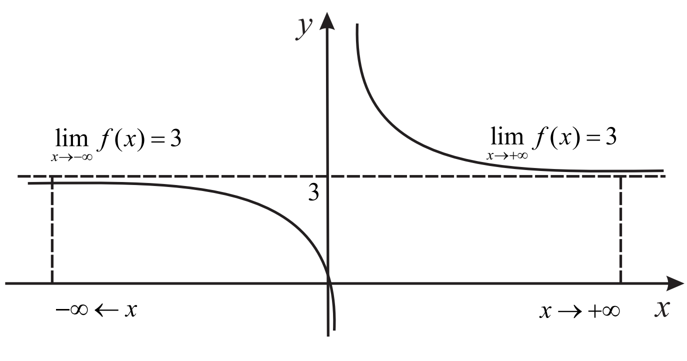


Figura 1.31: Límites al infinito de $f(x)$

Ejemplo 1.6.7 *Calcule el limite al infinito de* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^3 + x + 2}$

Solución:

1ro Factorizar la variable x de exponente mayor al numerador y denominador, sabemos por una de las propiedades de límites al infinito $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, utilizando propiedades de limites al infinito resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\dfrac{x^3}{x^3} + \dfrac{x^2}{x^3} - \dfrac{2x}{x^3} - \dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3} + \dfrac{x}{x^3} + \dfrac{2}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}}
\end{aligned}$$

2do $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}} = 2$

3ro Presentamos la representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^3 + x + 2}$ cuando x crece y decrece infinitamente.

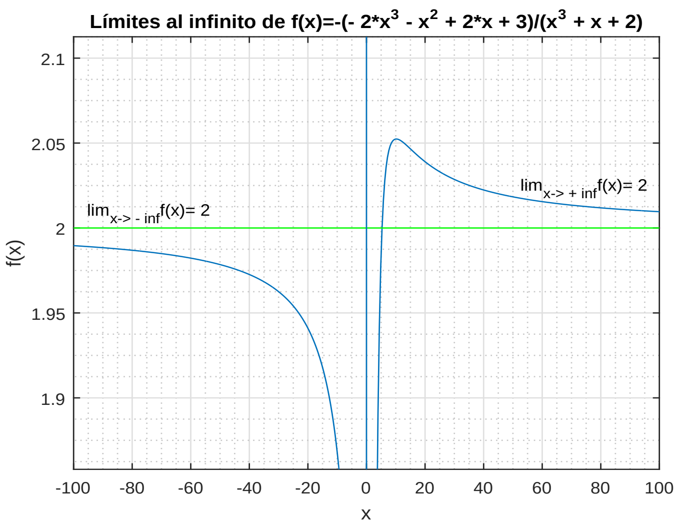


Figura 1.32: Límites al infinitos

Ejemplo 1.6.8 *Analice el comportamiento de la función* $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x - 9}{\sqrt{10x^4 + 3x^2 + 5}}$ *bajo el concepto de límites al infinito, cuando* $x \to \infty$.

Solución:

Factorizar variable x^2 de mayor exponente del numerador y denominador, esto es:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x - 9}{\sqrt{10x^4 + 3x^2 + 5}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(5 - 3\frac{1}{x} - 9\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^4(10 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^4})}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(5 - 3\frac{1}{x} - 9\frac{1}{x^2})}{\sqrt{(10 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^4})}}
\end{aligned}$$

Además sabemos por propiedad de limites al infinito $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ o $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(5 - 3\frac{1}{x} - 9\frac{1}{x^2})}{\sqrt{(10 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^4})}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Representación gráfica de la función es:

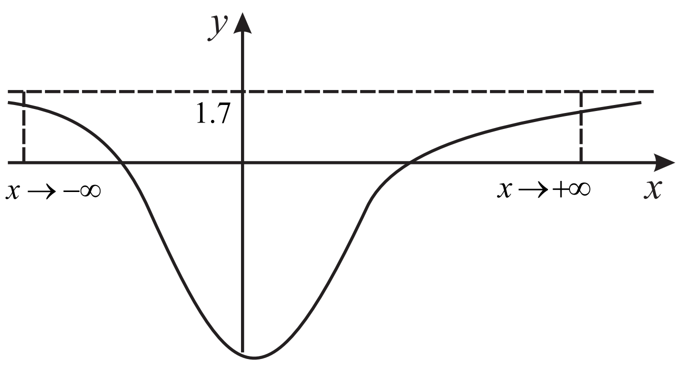


Figura 1.33: Límites al infinitos

Teorema 1.6.1 (Propiedades de límites al infinito) *Sea una* $f(x)$ *que crece o decrece infinitamente o es finito cuando* $x \to +\infty$ *o* $x \to -\infty$ *después de haber* *agotado todas las operaciones necesarias para levantar la indeterminación de valores numéricos, si aún persiste el denominador resulte cero, entonces el límite es infinito de la función. Entonces la función puede tomar valores $+\infty$ ó $-\infty$ tenga presente lo siguiente: Si consideramos las condiciones de límites de funciones reales, definidas por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ donde a y $\neq 0$ y son números reales y presentamos la siguientes propiedades, [10]:*

1. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{+g(x)} = \dfrac{+c}{0^+} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{-g(x)} = \dfrac{c}{0^-} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{+g(x)} = \dfrac{-c}{0^+} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{-g(x)} = \dfrac{-c}{0^-} = +\infty$

Ejemplo 1.6.9 *Analizar el gráfico de la función utilizando definición de límites infinitos para valores tan cercanos a $x = 2$ por la derecha como por la izquierda los valores de $f(x) = 3/(x-2)^2$. Halle los límites laterales de $f(x)$.*

Solución:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

La función $f(x)$ crece infinitamente cuando x se acerca o aproxima al valor numérico $x = 2$ por la derecha y tanto por la izquierda, observamos claramente la función real $f(x)$ crece infinitamente, por ello presentamos la representación geométrica para analizar el comportamiento cualitativo de la función $f(x)$ bajo el operador limite cuando $x \to 2$, utilizando propiedades de limites infinitos, esto es:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

presentamos la gráfica de la función real establecida.

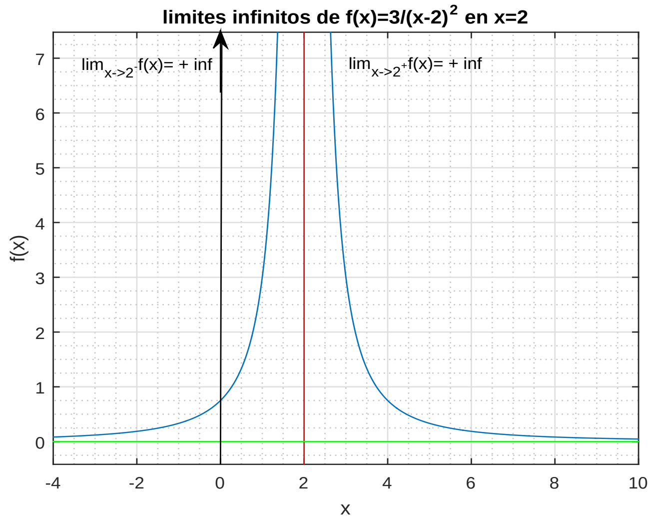


Figura 1.34: Límites infinitos

Ejemplo 1.6.10 *Analizar el gráfico de la función utilizando definición de límites infinitos para valores tan cercanos a $x = 2$ por la derecha como por la izquierda los valores de $f(x) = (x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 2)/(3x^3 - 11x^2 + 8x + 4)$. Halle los límite al infinito de $f(x)$.*

Solución: Si $x < 2$ entonces $x \to 2^-$, la función decrece infinitamente esto es:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 2}{(3x^3 - 11x^2 + 8x + 4)} \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x^4 + 3x - 1)}{(x-2)(3x^2 - 5x - 2)} \text{ entonces resulta:} \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^4 + 3x - 1}{3x^2 - 5x - 2} = -\infty
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ entonces $x \to 2^+$, la función crece infinitamente esto es:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^4 + 3x - 1)}{(x-2)(3x^2 - 5x - 2)} \text{ entonces resulta:} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^4 + 3x - 1}{3x^2 - 5x - 2} = +\infty
\end{aligned}$$

La representación gráfica de la función real,se observa claramente la función real $f(x)$ crece infinitamente, para las aproximaciones por la derecha y izquierda de la variable $x \to 2$, este resultado mediante propiedades de limites infinitos.

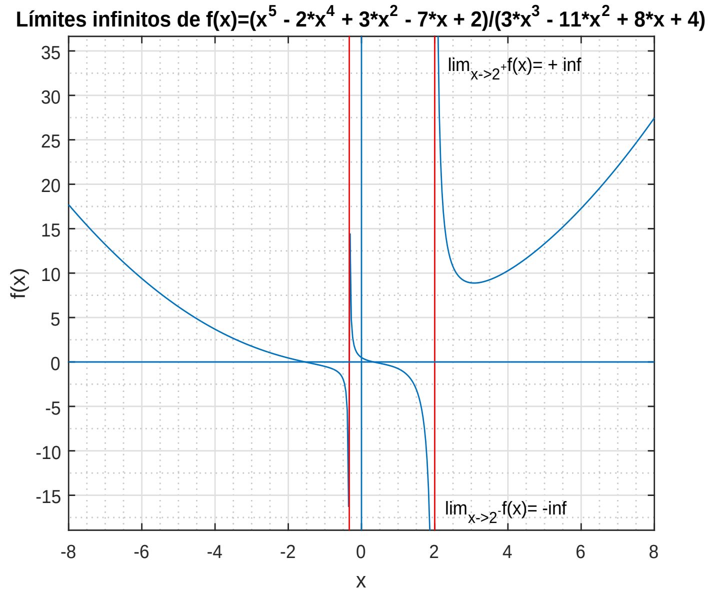


Figura 1.35: Límites infinitos

Ejemplo 1.6.11 *Analizar el gráfico de la función utilizando definición de límites al infinito para valores muy grandes de x por la derecha como por la izquierda los valores de $f(x) = (20x^2 - 3x - 9)/\sqrt{(10x^4 + 3x^2 + 10)}$. Halle el límite al infinito de $f(x)$.*

Solución:

1ro La función del denominador despejamos la variable de máximo exponente x^4 y denominador x^2 resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)(20 - 3/x - 9/x^2)}{(x^2)\sqrt{10 + 3/x^2 + 10/x^4}}\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

2do La función del denominador despejamos la variable de máximo exponente x^4 y denominador x^2 resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2)(20 - 3/x - 9/x^2)}{(x^2)\sqrt{10 + 3/x^2 + 10/x^4}}\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

Por consiguiente la función $f(x)$ se aproxima a una cantidad finita numéricamente, cuando crece o decrece infinitamente la variable.

$x \to \pm\infty$, esto implica, por propiedades de limites al infinito $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$, esto es: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(\pm\infty)$ entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2\sqrt{10}$

Representación gráfica:

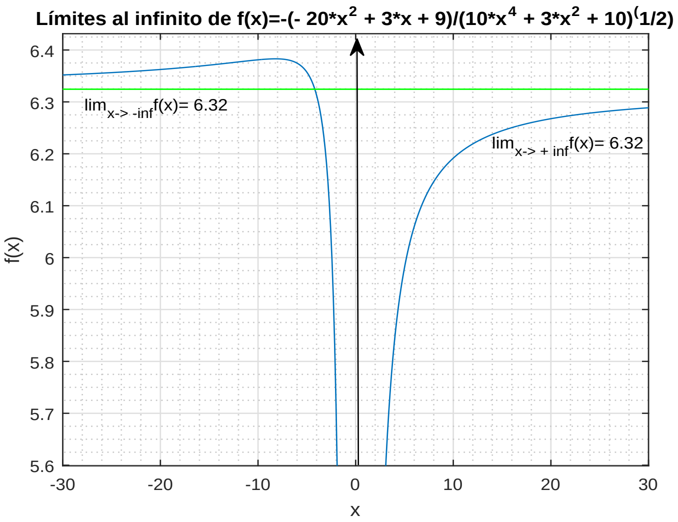


Figura 1.36: Límites al infinitos

Definición 1.11 (Límites infinitos al infinito) *Se dice que una función $f(x)$ crece infinitamente cuando $x \to +\infty$. es decir:*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: *si $\Leftrightarrow$ para cada M número positivo existe un número positivo N tal que $f(x) > M$ siempre que $x > N$, [7], [8].*

Se dice que una función $f(x)$ decrece infinitamente cuando $x \to -\infty$. es decir:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: *si $\Leftrightarrow$ para cada P número negativo existe un número negativo Q tal que $f(x) < P$ siempre que $x < Q$, [7], [8].*

Observación: Los límites de la función real $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, son en cierto modo , limites laterales (el primero por la izquierda y el segundo por la derecha). Este resultado es válido si la función real definido sobre un dominio o recta real $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $f(x)$ es monótona y acotada , entonces existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ si el dominio A no está acotada superiormente y existe $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ si el dominio A no está acotada inferiormente.

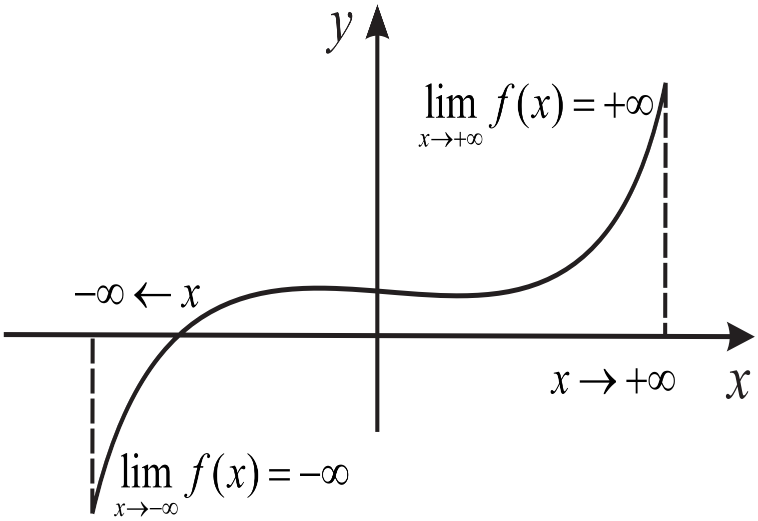


Figura 1.37: Límites infinitos al infinitos

Ejemplo 1.6.12 *Halle el límite al infinito de la función* $f(x) = \dfrac{4x^2-5x-2}{7x^2+4x+6}$ *cuando* $x \to \infty$

Solución:
Sabemos por propiedad de limites al infinito $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, reemplazando en cada uno de los términos del numerador como numerador bajo el operador limite, y resulta.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x-2}{7x^2+4x+6} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2-5x-2}{x^2}}{\dfrac{7x^2+4x+6}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4-\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{7+\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x^2}} \\
&= \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

Representación gráfica de la función.

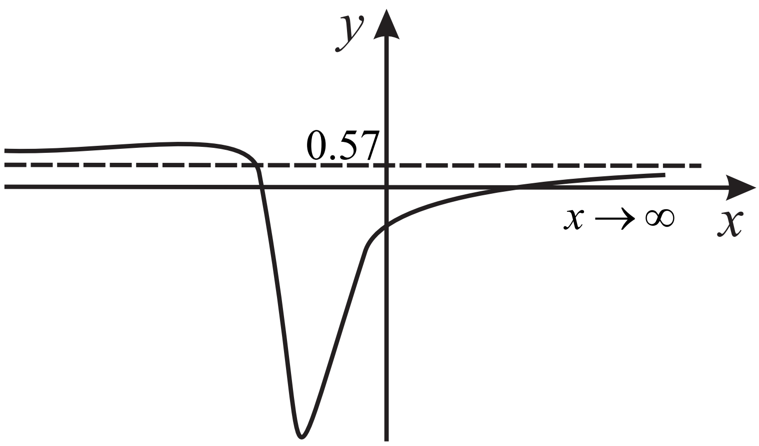


Figura 1.38: Límites al infinitos

Ejemplo 1.6.13 *Halle el límite al infinito de la función:*

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$$

cuando $x \to \infty$ *y* $x \to -\infty$.

Solución:

Si $x \to \infty$ entonces la función $f(x)$ factorizando la variable x, de mayor exponente numerador como denominador y resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + 3\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Si $x \to -\infty$ entonces la función $f(x)$ resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + 3\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Representación gráfica de la función.

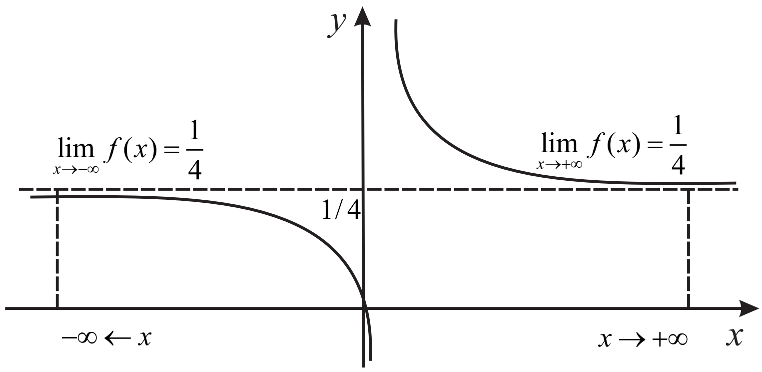


Figura 1.39: Límites al infinito

Ejemplo 1.6.14 *Halle el límite de la función* $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 + x + 2}$ *cuando* $x \to \infty$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 + x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - 3\frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - 3\frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3}} = 2
\end{aligned}$$

Representación gráfica de la función:

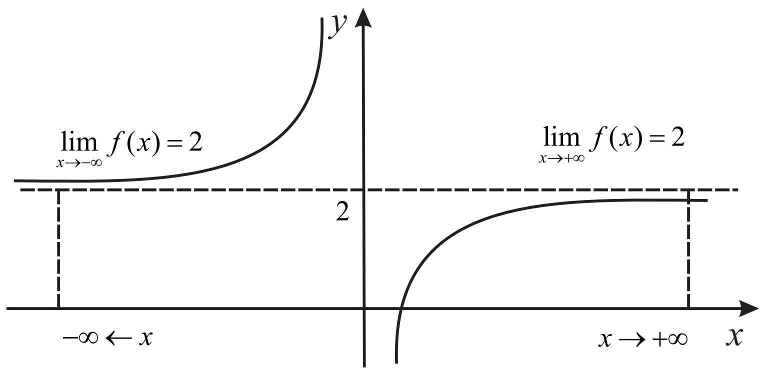


Figura 1.40: Límite al infinito

Ejemplo 1.6.15 *Halle el límite infinitos de la función* $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{x^2 + x - 6}$ *cuando* $x \to 2$ *y* $x \to -3$.

Solución:

Sea $x=-3$, análisis, si $x<-3$ entonces $x\to -3^-$, la función será:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3^-} f(x) &= \lim_{x\to -3^-}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-6}\\ &= \lim_{x\to -3^-}\frac{x^3+x+2}{(x+3)(x-2)}=\frac{-}{0^-}=-\infty\end{aligned}$$

Si $x>-3$ entonces $x\to -3^+$, la función será:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3^+} f(x) &= \lim_{x\to -3^+}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-6}\\ &= \lim_{x\to -3^+}\frac{x^3+x+2}{(x+3)(x-2)}=\frac{+}{0^+}=+\infty\end{aligned}$$

Similar análisis haremos para $x=2$, $x<2$ entonces $x\to 2^-$, la función será:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-6}\\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3+x+2}{(x+3)(x-2)}=\frac{-}{0^-}=-\infty\end{aligned}$$

Si $x>2$ entonces $x\to 2^+$, la función será:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-6}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+x+2}{(x+3)(x-2)}=\frac{+}{0^+}=+\infty\end{aligned}$$

Representación gráfica:

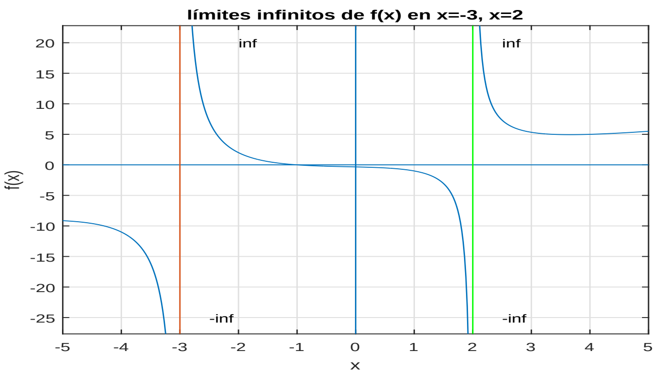


Figura 1.41: Limite al infinito

1.6.1. Ejercicios propuestos

Halle límites infinitos o al infinito de las funciones reales definidas en su dominio respectivo.

1. Halle el límite de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x+5} = 3$

2. Halle el limite de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-5x+3}{5x^3-2x^2-4x+8} = \dfrac{2}{5}$

3. Halle el límite de $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+5x+2} - 3x = \dfrac{5}{6}$

4. Halle $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^5-3x^4-14x^3+58x^2-51x+9}{x^5-6x^4-10x^3+144x^2-351x+270} = \pm\infty$

5. Halle $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x^2+6x+7)^2(x^3+x+9)^2}{(3x^5+3x^3+13x-7)^2} = \dfrac{25}{9}$

6. Halle $\lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{2x^3+3x^2-7x+5}{x^2+3x+8} - \sqrt[3]{8x^3+5x^2-40}] = -\dfrac{41}{12}$

7. Halle $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{32x^2+10x+15} - \sqrt{32x^2-10x-5}] = 1.78$

8. Halle $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{5x^3+2x^2+10x+5} - \sqrt{x^3+x^2-10x+7}] = 5$

9. Halle $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^6-8x^5+27x^4-46x^3+28x^2+24x-32}{x^6-7x^5+10x^4+40x^3-160x^2+208x-96} = +\infty$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt[3]{x^4+x3} - \sqrt[3]{x^3+x^2}] = -\dfrac{1}{12}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{2x^5+2x^4+3x^2+5}{x^2+2x} - \dfrac{2x^4+2x^3+3}{x+2}] = 3$

12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4+3x^3-12x-16}{x^4+2x^3+8x+6} = -\infty$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-2x^4+3x^3-7x+2}{3x^3-11x^2+8x+4} = \infty$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+2x^2+5x-7}{3x^3-4x^2-x+2} = \infty$

1.7. Límites de funciones trigonométricas

Sea $f(x)$ función trigonométrica definida en sus respectivos dominios. Para calcular el $\lim\limits_{x\to x_0} F.T(x) = L_0$ cuando los valores de x sean tan cercano a x_0, propiedades de límites especiales, [4],[6], [21]:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$
7. $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$
8. $\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$
9. $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x} = \pi$
10. $\operatorname{arcsec} x = \arccos \dfrac{1}{x}$
11. $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{x}$

Ejemplo 1.7.1 *Analizar el comportamiento de la función* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *si* $x \to 0$

Solución:
Esto es: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, entonces la representación gráfica:

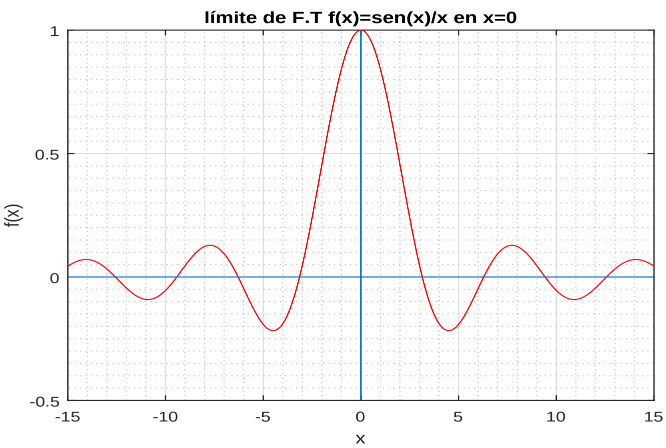


Figura 1.42: Límite de función trigonométrica

Ejemplo 1.7.2 *Analizar comportamiento de la función* $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *si* $x\to 0$.

Esta es una de las propiedades más importantes dentro de funciones trigonométricas, puesto en límite $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ se aproxima a la mitad de uno cuando x se hace tan cercano al número cero por la derecha e izquierda y esto es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Representación gráfica:

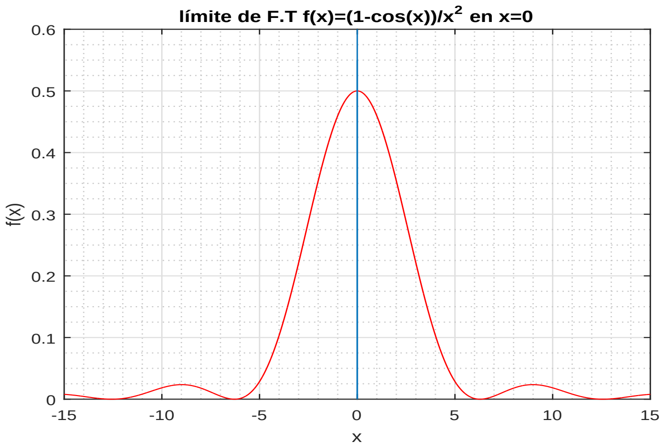


Figura 1.43: Límite de función trigonométrica

Ejemplo 1.7.3 *Calcule el limite de la función trigonométrica:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x-3\operatorname{sen}3x+2\operatorname{sen}5x}{5x-4\operatorname{sen}2x+3\operatorname{sen}4x}+\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{8x-3\operatorname{sen}3x+2\operatorname{sen}5x}{5x-4\operatorname{sen}2x+3\operatorname{sen}4x}+\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{8-3\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}+2\dfrac{\operatorname{sen}5x}{x}}{5-4\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}+3\dfrac{\operatorname{sen}4x}{x}}+\frac{\cos x-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}\right]\end{aligned}$$

Según propiedad de funciones trigonométricas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(Ax)}{x}=A \text{ y } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{8-9+10}{5-8+12} + 1 + 2 = 4$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$

Ejemplo 1.7.4 *Halle el límite de la función* $f(x) = \dfrac{\cos 3(x+h) - \cos(3x)}{h}$ *cuando* $h \to 0$

Solución:

Sea $\cos(3x+3h) = \cos(3x)\cos(3h) - \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h)$

además verifica $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos 3(x+h) - \cos(3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(3x)\cos(3h) - \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h) - \cos(3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos(3x)(1-\cos(3h)) - \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3\cos(3x)(1-\cos(3h))}{3h} - \lim_{h\to 0} \frac{3\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(3h)}{3h}
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1-\cos(3h))}{3h} = 0$, además $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3h)}{3h} = 1$ y por consiguiente resulta.

$\lim\limits_{h\to 0} f(x) = -3\cos(3x)\cdot 0 - 3\operatorname{sen}(3x)\cdot 1$ entonces $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = -3\operatorname{sen}(3x)$

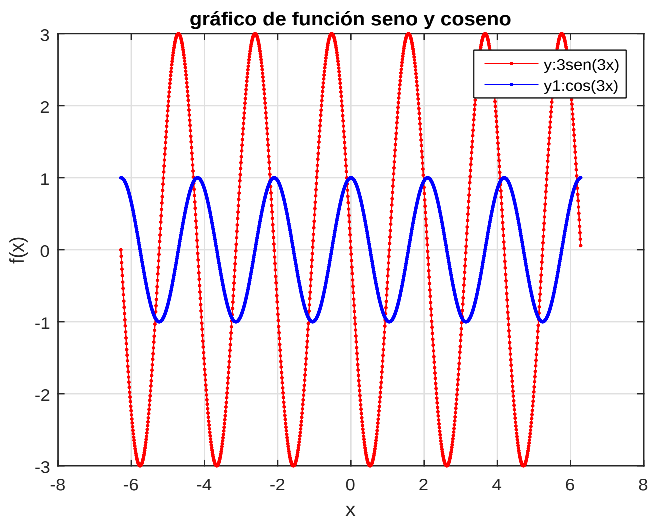


Figura 1.44: Gráfica de funciones trigonométricas

Ejemplo 1.7.5 *Halle el límite de la función trigonométrica.*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\sec(4x))}{\operatorname{sen}(4x)(1-\sec(3x))} \text{ cuando } x \to 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \sec 4x(\cos 4x - 1)}{\operatorname{sen} 4x \sec 3x(\cos 3x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x \sec 4x)(2\operatorname{sen}^2 2x)}{\operatorname{sen} 4x \sec 3x(4\cos^3 x - 3\cos x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \sec 4x 2 \operatorname{sen}^2 2x}{2\operatorname{sen} 2x \cos 2x \sec 3x(4\cos^3 x - 3\cos x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \sec 4x \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x \sec 3x(1-\cos x)(4\cos^2 x + 4\cos x + 1)} = \frac{4}{9} \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Representación gráfica del límite de la función trigonométrica $f(x)$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$

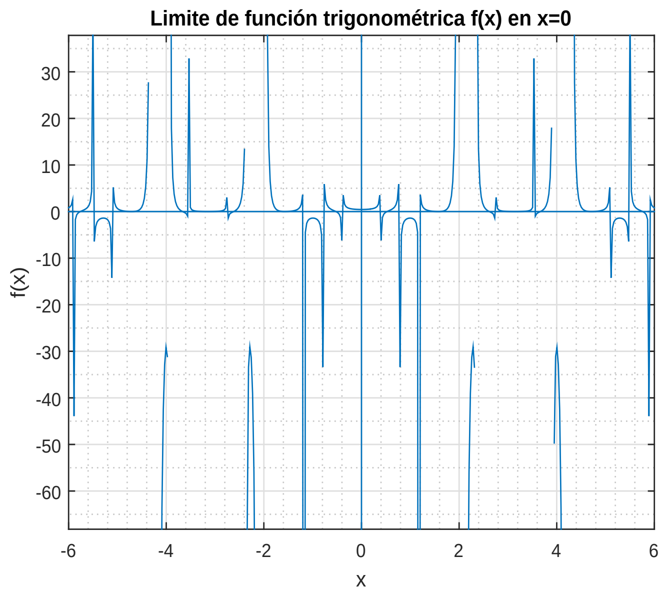


Figura 1.45: Límite de función trigonométrica

Ejemplo 1.7.6 *Calcule el límite de la función* $f(x) = \dfrac{3\operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(3\pi x)}{(x-1)^3}$ *en* $x = 1$

Solución:

Hacemos cambio de variable $x-1=z$ entonces $x=z+1$, luego $x\to 1$ entonces $z\to 0$, denominado punto de acumulación nueva.

Aplicamos el operador límite a cada miembro y uso de propiedades trigonométricas, esto es:

$\operatorname{sen}(3\pi x)=3\operatorname{sen}(\pi x)-4\operatorname{sen}^3(\pi x)$ reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{3\operatorname{sen}(\pi x)-\operatorname{sen}(3\pi x)}{(x-1)^3}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}(\pi z)+\operatorname{sen}(3\pi z)}{z^3}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}(\pi z)+3\operatorname{sen}(\pi z)-4\operatorname{sen}^3(\pi z)}{z^3}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-4\operatorname{sen}^3(\pi z)}{z^3}=-4(\pi)^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.7 *Halle el limite de la función* $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)-\tan(2x)}{\operatorname{sen}(3x)-\tan(3x)}$ *cuando* $x\to 0$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)(1-\sec(2x)}{\operatorname{sen}(3x)(1-\sec(3x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)(\cos(2x)-1)}{\tan(3x)(\cos(3x)-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)(2\operatorname{sen}^2 x)}{\tan(3x)(4\cos^3 x-3\cos x-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)(2\operatorname{sen}^2 x)}{\tan(3x)(1-\cos x)(4\cos^2 x+4\cos x+1)}=\frac{8}{27}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.8 *Halle el límite de la función trigonométrica.*

$$f(x)=\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos^3 x}\ \textit{cuando}\ x\to 0$$

Solución:

Sabemos por propiedad de funciones trigonométricas:

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$ y $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x-1$ reemplazando estas ecuaciones se tiene:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-8\cos^6 x+10\cos^4 x-3\cos^2 x}{1-\cos^3 x}$$

Factorizando términos comunes se tiene:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(8\cos^5 x + 8\cos^4 x - 2\cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x + 1)}{(1-\cos x)(1+\cos x + \cos^2 x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(8\cos^5 x + 8\cos^4 x - 2\cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x + 1)}{(1+\cos x + \cos^2 x)} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

1.7.1. Ejercicios propuestos

Calcule los límites de las funciones trigonométricas utilizando de los propiedades.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{3\,\mathrm{sen}(\pi x) - \mathrm{sen}(3\pi x)}{(x+1)^3} = -39.4$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x) - \tan(2x)}{\mathrm{sen}(3x) - \tan(3x)} = \frac{8}{27}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x+2) - \mathrm{sen}(x-2)}{\tan(x+2) - \tan(x-2)} = \cos(2)$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{4\tan(x) - 4\,\mathrm{sen}(x)}{x^3} = 2$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(3x)\,\mathrm{sen}(2x)}{x^2} = 6$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\mathrm{sen}^2 x} = -\frac{1}{12}$
7. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 4\cos^2 x}{8\,\mathrm{sen}(x - \pi/3)}$
8. $\lim_{x\to \pi/6} \frac{\mathrm{sen}(x - \pi/6)}{1 - 2\cos 2x} = \frac{\sqrt[3]{2}}{6}$
9. $\lim_{h\to 0} \frac{4\tan(x) - 4\,\mathrm{sen}(x)}{x^2} = 0$
10. $\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
11. $\lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+2h) - 2\tan(x+h) + \tan(x)}{h^2}$
12. $\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{sen}(x+a) - \mathrm{sen}(x-a)}{\tan(x+a) - \tan(x-a)} = \cos(a)$
13. $\lim_{x\to \frac{3\pi}{5}} \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{5x}{3})}}{\sqrt{3\pi} - \sqrt{5x}} = 1.45$

1.8. Cálculo de límites de la forma

Sea una función polinomial, funciones trascendentales, radicales, exponenciales o logarítmicas definidas por [4], [10], [13] como:
$f(x) = 1 + \phi(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y luego $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \phi(x) = 0$; el limite de la forma se obtiene mediante la regla definida mediante:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\phi(x)}$$

1.8.1. Propiedad logarítmica

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \ln(a)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$

Ejemplo 1.8.1 *Calcule el límite de:*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3 + 4x + 5}{4x^3 - 6x^2 + 7}\right)^{2x+3}$$

Solución: Evaluamos la función $f(x)$ cuando x crece muy grande, esto es:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4x^3 + 4x + 5}{4x^3 - 6x^2 + 7} - 1\right)^{2x+3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{6x^2 + 4x - 2}{4x^3 - 6x^2 + 7}\right)^{2x+3} \\
&= \lim_{x\to\infty} [1 + \phi(x)]^{g(x)}
\end{aligned}$$

Utilizamos la fórmula: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\phi(x)}$ Hallamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^3}} = 1 \\
\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} 2x + 3 = +\infty \\
\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^3}}\right)^{2x+3} = 1^{\infty}
\end{aligned}$$

Este valor no existe cuando $x \to \infty$. Ahora restando y sumado 1 se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{6x^2 - 5x - 2}{4x^3 - 6x^2 + 2}\right)^{2x+3} \quad \text{donde verifica:} \\
\lim_{x\to\infty} \phi(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{6x^2 + 4x - 2}{4x^3 - 6x^2 + 2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Debemos comprobar la siguiente relación:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} (2x+3)\cdot\left(\frac{6x^2 - 5x - 2}{4x^3 - 6x^2 + 2}\right)} = e^3$$

Ejemplo 1.8.2 *Calcule el límite de:*

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^3+9x^2+4x+5}{3x^3+7x^2+3x+5}\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x^3+9x^2+4x+5}{3x^3+7x^2+3x+5}-1\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+x}{3x^3+7x^2+3x+5}\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+x}{3x^3+7x^2+3x+5}\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}\\
\lim_{x\to 0}\phi(x) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2+x}{3x^3+7x^2+3x+5}\right) = \frac{0}{5} = 0
\end{aligned}$$

Debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} &= e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\phi(x)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2+5x+2}{4x})\cdot(\dfrac{2x^2+x}{3x^3+7x^2+3x+5})} = e^{\dfrac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.8.3 *Calcule el límite de:*

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+x^3+14x+3}{2x^4+x^3+12x+6}\right)^{4x^3+5}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^4+x^3+14x+3}{2x^4+x^3+12x+6}-1\right)^{4x^3+5}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x^4+x^3+12x+6}\right)^{4x^3+5}
\end{aligned}$$

Evaluamos la función $f(x)$ cuando x crece muy grande, esto es:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x^4+x^3+12x+6}\right)^{4x^3+5}\\
&= \lim_{x\to\infty}[1+\phi(x)]^{g(x)}\\
\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} 4x^3+5 = +\infty\\
\lim_{x\to\infty} \phi(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x^4+x^3+12x+6}\right) = \frac{0}{2} = 0\\
\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}(4x^3+5)(\frac{2x-3}{2x^4+x^3+12x+6})} = e^4
\end{aligned}$$

Por lo tanto resulta: $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = e^4$

Ejemplo 1.8.4 *Calcule el límite de* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16^{x-1}-9^{x-1}}{x^3-1}$

Solución: Hacer cambio de variable de la forma $x-1=z$ entonces $x=z+1$ además $z\to 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{z\to 0}\frac{16^z-9^z}{(z+1)^3-1}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{16^z-9^z}{z^3+3z^2+3z+1-1}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{16^z-9^z}{z(z^2+3z+3)} = \lim_{z\to 0}\frac{(16^z-1)-(9^z-1)}{z(z^2+3z+3)}
\end{aligned}$$

Uso de límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \ln(a)$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{16^z-1}{z(z^2+3z+3)} - \lim_{z\to 0}\frac{9^z-1}{z(z^2+3z+3)} = \frac{\ln\frac{16}{9}}{3}$$

Por lo tanto resulta: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{\ln\frac{16}{9}}{3}$

Ejemplo 1.8.5 *Calcule el límite de la función definida por:*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{3x^3+9x^2+19x+2}{3x^3+7x^2+16x+2}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^3+9x^2+19x+2}{3x^3+7x^2+16x+2}\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x^3+9x^2+19x+2}{3x^3+7x^2+16x+2}-1\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+3x}{3x^3+7x^2+16x+2}\right)^{\dfrac{x^2+5x+2}{4x}} = \lim_{x\to 0}(1+\phi(x))^{g(x)}
\end{aligned}
$$

Ahora hallemos el límite de la función $\phi(x)$, en efecto:

$$
\lim_{x\to 0}\phi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{3x^3+7x^2+16x+2} = \frac{0}{2} = 0
$$

Luego utilizamos la formula de: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} g(x)\phi(x)}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x}{3x^3+7x^2+16x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+2}{4x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+3}{3x^3+7x^2+16x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+2}{4}}\\
&= e^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.8.6 *Halle el límite de la función $f(x)$ definida por:*

$$
\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+4x-3}{3x^2-2x-3}\right)^{\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2}}
$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x^2+4x-3}{3x^2-2x-3}-1\right)^{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{6x}{3x^2-2x-3}\right)^{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\phi(x))^{g(x)} \\
\lim_{x\to 0} \phi(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x^2-2x-3} = 0 \\
\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} &= e^{\lim\limits_{x\to 0} g(x)\phi(x)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6x}{3x^2-2x-3}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6}{3x^2-2x-3}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right)} \\
&= e^{-6}
\end{aligned}
$$

1.9. Continuidad de funciones reales

La idea de continuidad de funciones reales, se tiene al considerar que su trayectoria es continua en todo los puntos del dominio de definición, en el sentido que se puede dibujar o describir trayectorias, líneas sin levantar el lápiz sobre una hoja de papel, sobre una superficie o trayectorias descritas por un objeto en el tiempo y espacio. La continuidad esta expresada enteramente por medio de las propiedades del sistema de números reales, esta fue formulada por primera vez por Agustín Luis Cauchy: Sostiene, como la descripción de la trayectoria o línea de un móvil en el tiempo y espacio, es decir esto nos sugiere la ausencia de interrupciones, saltos bruscos en un punto del dominio o sobre su dominio de la función definida; cabe aclarar la función no presenta discontinuidad en los puntos definidos y es posible en todo su dominio de la función.

Definición 1.12 (Continuidad de funciones) *Sea una función real definida en un subconjunto de la recta real $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ para todo $x \epsilon D$se dice que es continua en x_0, si cumple las tres condiciones siguientes, [7], [8].*

i) $f(x_0)$ *existe.*

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x)$.

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *[4],[21].*

Definición 1.13 *Una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida en el conjunto* $D \subset \mathbb{R}$, *se dice que es continua en el punto* $a \in D$, *cuando, para cada* $\varepsilon > 0$ *se puede obtener un* $\delta > 0$ *tal que* $x \in D$ *y* $|x - a| < \delta$ *impliquen* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. *Expresión matemática: Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *con* $x \in D$, $|x - a| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Se dice que $f(x)$ *es una función continua cuando* $f(x)$ *es continua en todo los puntos* $a \in D$.
Se dice $f(x)$ *es discontinua en* $a \in D$ *a una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *.Si existe* $\varepsilon > 0$ *con la siguiente propiedad: Para todo* $\delta > 0$ *se puede encontrar* x_δ *tal que* $|x_\delta - a| < \delta$ *y* $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$, *[7], [8].*

Teorema 1.9.1 *Si* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas en el punto* $a \in D$ *entonces también son continuas en dicho punto las funciones siguientes:*

1. $f \pm g$ *es continua en* $a \in D$.
2. $f.g$ *es continua en* $a \in D$.
3. f/g *es continua en* $a \in D$ *con* $g(a) \neq 0$
4. *la función compuesta* $g \circ f$ *es continua en* $a \in D$.

Ejemplo 1.9.1 *Estudie la continuidad de la función real definida sobre su dominio:*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & x < 2 \\ -x^2 + 8 & x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

1. Que el punto $x = 2$ tenga su imagen , esto es; $f(2) = -x^2 + 8 \,|_2 = -4 + 8 = 4$ existe.
2. Existe los límites laterales en $x = 2$. Si $x < 2$ entonces $x \to 2^-$, establecemos el operador limite $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^3 - 3x + 2) = 4$

Si $x \geq 2$ entonces $x \to 2^+$, establecemos $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+8) = 4$

Como los limites laterales de $f(x)$ en $x = 2$ son iguales, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

3. La imagen en el punto $x = 2$ coincide con el limite de la función $f(x)$, es decir: $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. La gráfica de la función $f(x)$ por tramos es continua en $x = 2$

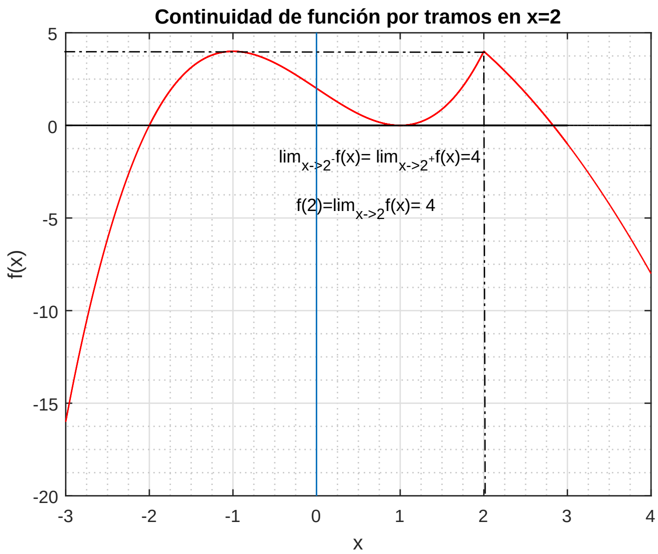


Figura 1.46: función continua por tramos en x=2

Ejemplo 1.9.2 *Estudie la continuidad de la función real definida sobre su dominio:analizar el desplazamiento de una persona*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6 & x \leq 2 \\ 4 - x & 2 < x \leq 3 \\ x^2 - 8 & 3 < x \leq 5 \\ x^2 - 4x + 12 & x > 5 \end{cases}$$

Solución:

1. Veamos el punto $x = 2$ tenga su imagen $f(2) = (x^3 - 6)|_2 = 2$. existe
   Hallemos los límites laterales de la función por tramos $f(x)$ en $x = 2$.
   Si $x < 2$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^3 - 6) = 2$

Si $x > 2$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^+}(4-x) = 2$

Por lo tanto los límites laterales son iguales, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$

entonces existe el limite de la función en $x = 2$, esto es: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

2. Veamos el punto $x = 3$ tenga su imagen $f(x) = (4-x)|_3 = 1$ si existe.

   Hallemos los límites laterales de la función por tramos $f(x)$ en $x = 3$.

   Si $x < 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 3^-}(4-x) = 1$

   Si $x > 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-8) = 1$

   Por lo tanto los límites laterales son iguales, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$ entonces existe el límite de la función en $x = 2$, esto es: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

3. Veamos el punto $x = 5$ tenga su imagen $f(x) = (x^2-8)|_5 = 17$ si existe.

   Hallemos los límites laterales de la función por tramos $f(x)$ en $x = 5$.

   Si $x < 5$ entonces $\lim\limits_{x\to 5^-}(x^2-8) = 17$

   Si $x > 5$ entonces $\lim\limits_{x\to 5^+}(x^2-4x+12) = 17$

   Por lo tanto los límites laterales son iguales, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 17$

   entonces existe el límite de la función en $x = 5$, esto es: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 17$

4. La función por tramos es continua en $x = 2$, $x = 3$ y $x = 5$. Veamos el análisis gráficamente.

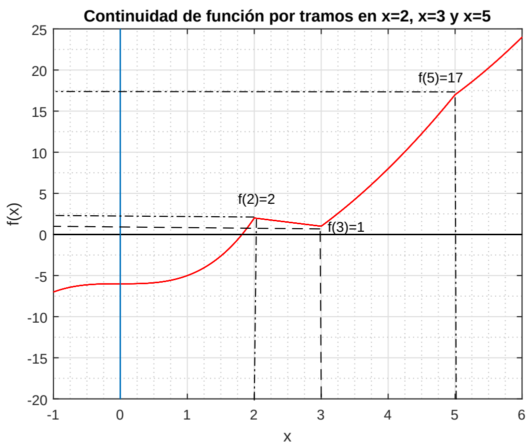


Figura 1.47: Función continua por tramos en $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$

Ejemplo 1.9.3 *Estudie la continuidad de la función real definida por tramos sobre la recta real:analizar el desplazamiento de un insecto.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x - 6 & x \leq 2 \\ 2x + 6 & 2 < x \leq 3 \\ x^3 - 15 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Solución:

Veamos la representación gráfica de la función definida por partes:

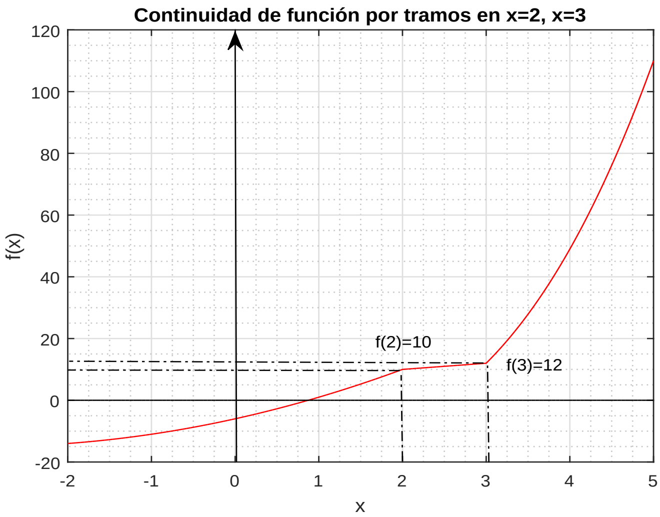


Figura 1.48: función continua por tramos en $x = 2$, $x = 3$

1. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ por tramos en $x = 2$

   a) Si $f(2) = (2x + 6)\mid_2 = 10$ existe la imagen de $x = 2$.

   b) Veamos si existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ entonces hallemos los limites laterales.

   Si $x < 2$ entonces $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 6x - 6) = 10$

   Si $x > 2$ entonces $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 6) = 10$

   Por lo tanto los límites laterales son iguales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 10$

   entonces el límite de función $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 10$ existe.

   c) Existe la imagen de $x = 2$, esto es: $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

   d) Afirmamos de $(1a)$, $(1b)$ y $(1c)$ la función $f(x)$ en continua en $x = 2$

2. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ por tramos en $x = 3$

   a) Si $f(3) = (x^3 - 15)\mid_3 = 12$ entonces existe.

   b) Veamos si existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ entonces hallemos los limites laterales.
   Si $x < 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x + 6) = 12$
   Si $x > 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^3 - 15) = 12$
   Por lo tanto los limites laterales son iguales: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 12$

   c) Existe la imagen de $x = 3$, esto es: $f(3) = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

   d) Afirmamos de $(2a)$, $(2b)$ y $(2c)$ la función $f(x)$ es continua en $x = 3$

Ejemplo 1.9.4 *Estudie la continuidad de la función real definida por tramos sobre la recta real:analizar el desplazamiento de Águila Peregrino.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & 0 < x \leq 2 \\ 4x & 2 < x \leq 3 \\ x^3 - 15 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Solución:

1. Veamos la continuidad de la función por tramos $f(x)$ en $x = 2$, utilizamos las tres condiciones de función continua, en efecto se tiene:

   a) Existe la imagen de $x = 2$ entonces $f(2) = (x^2 - 6x + 1)|_2 = -7$ por tanto si existe la imagen.

   b) Analizamos las condiciones de limites laterales de la función por partes en $x = 2$, esto es:
   Si $x < 2$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 6x + 1) = -7$
   Si $x > 2$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (4x) = 12$
   Los límites laterales de la función existen pero son diferentes:
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe

2. Veamos la continuidad de la función por tramos $f(x)$ en $x = 3$, utilizamos las tres condiciones de función continua , esto es:

a) Existe la imagen de $x = 3$ entonces $f(3) = (4x)|_3 = 12$ si existe.

b) Analizamos las condiciones de limites laterales de la función por partes en $x = 3$, esto es:

Si $x < 3$ entonces $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (4x) = 12$

Si $x > 3$ entonces $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^3 - 15) = 12$

Los límites laterales de la función existen y son iguales:

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 12$ entonces $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 12$ existe

La representación gráfica de las funciones por tramos y su dominio respectivo.

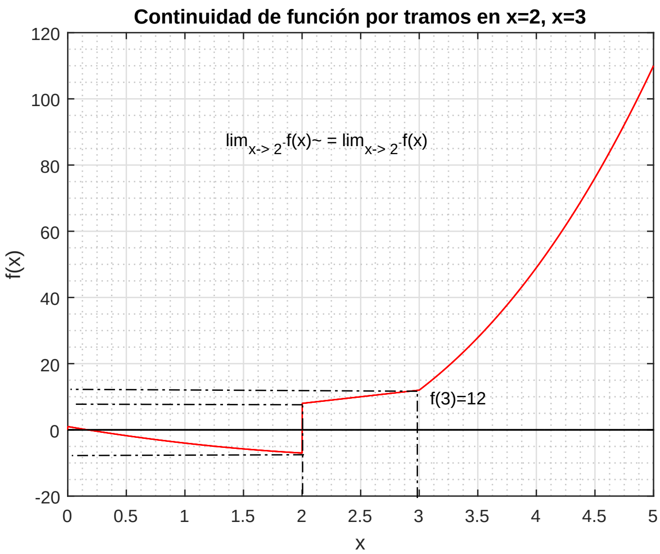


Figura 1.49: Función discontinua f(x) en $x = 2$ y continua en $x = 3$

Definición 1.14 (Discontinuidad de funciones) *En caso contrario, si falla una de las tres condiciones de continuidad de una función real, entonces diremos que la función es discontinua en* x_0*, es decir: Si,* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *no existe, entonces los límites laterales existen, pero son diferentes o el limite lateral existe y es finito, mientras uno de los limites laterales no existe. Además la imagen en* x_0 *esto es, no coincide con limite de la función definida* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *. Es decir el comportamiento de la función presenta discontinuidad en el punto* x_0 *y se denomina discontinuidad evitable* *o removible, esto implica la función puede ser redefinida en x_0 y existe el límite. Caso contrario la discontinuidad en x_0 es inevitable o no removible, [6],[18], [19].*

Teorema 1.9.2 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en todo el intervalo cerrado. Si establecemos $f(a) < d < f(b)$ entonces existe $c \in \langle a, b\rangle$ tal que $f(c) = d$, llamada teorema de valor medio.*

Teorema 1.9.3 *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en todo los puntos del intervalo cerrado. Entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Ejemplo 1.9.5 *Estudie la continuidad o discontinuidad de la función definida.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 15 & x < 2 \\ -2x^3 + 2x^2 + 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:
Representación gráfica es:

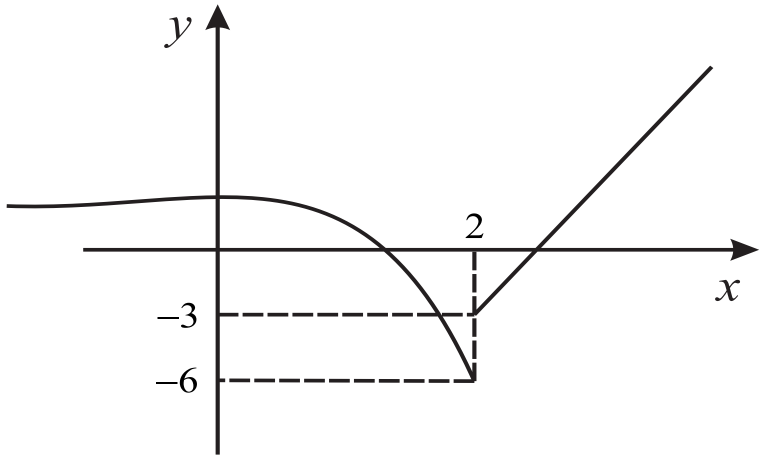


Figura 1.50: función discontinua por tramos en $x = 2$

1. Veamos la existencia de $f(2)$ entonces $f(2) = (-2x^3 + 2x^2 + 3)\mid_2 = -6$ existe.

2. Veamos los limites laterales para la función $f(x)$ en $x = 2$
   Si $x < 2$ aproximación por la izquierda entonces $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 + 4x - 15) = -3$

   Si $x > 2$ aproximación por la derecha entonces $\lim\limits_{x\to 2^+}(-2x^3 + 2x^2 + 3) = -6$

   Entonces los límites laterales de la función son diferentes, esto es:

3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.Por lo tanto el límite $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

4. De (1), (2) y (3) la función $f(x)$ por tramos no es continua en $x = 2$

Ejemplo 1.9.6 *Estudie la continuidad o discontinuidad de la función definida.*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 9 & x < 2.36 \\ 3 + (x-3)^2 & x \geq 2.36 \end{cases}$$

Solución:

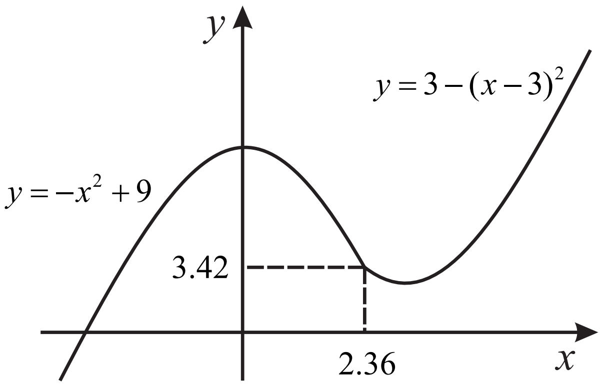


Figura 1.51: Función continua por tramos en $x = 2.36$

1. Veamos la existencia de $f(2.36)$ entonces $f(2.36) = (x^2 - 6x + 12)\mid_{2.36} = 3.42$

2. Hallemos los limites laterales para la función $f(x)$ en $x = 2.36$, en efecto:

   $\lim\limits_{x\to 2.36^-}(-x^2 + 9) = 3.42$ luego $\lim\limits_{x\to 2.36^+}(x^2 - 6x + 12) = 3.414$

   entonces los limites laterales de la función son iguales, esto es:

   $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

3. El limite de $f(x)$ en 2.36 si existe, $f(2.36) = \lim\limits_{x\to 2.36} f(x)$

4. De (1), (2) y (3) la función $f(x)$ por tramos es continua en $x = 2.36$

Ejemplo 1.9.7 *Estudie la continuidad o discontinuidad de la función definida:*

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x} \ \textit{en } x = 4$$

Solución:

Representacion gráfica.

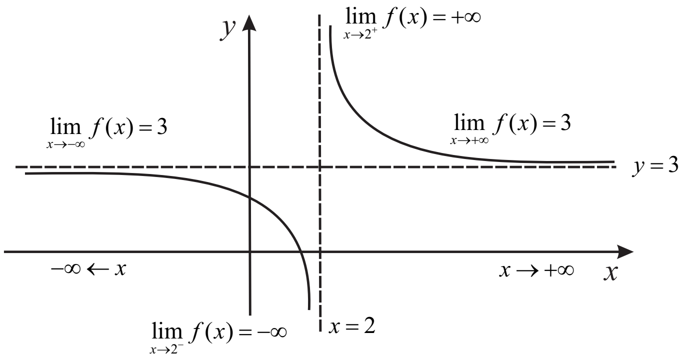


Figura 1.52: Función continua en $x = 4$ y discontinua en $x = 2$

1. Veamos la existencia de la imagen de $f(x)$ en $x = 4$, $f(4) = (\dfrac{3x^2}{x^2 - 2x})|_4 = 6$ existe

2. Veamos los limites laterales de $f(x)$ en $x = 4$:
   Si $x < 4$ entonces $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x} = 6$
   Si $x > 4$ entonces $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x} = 6$
   Los limites laterales son iguales en $x = 4$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 6$.

3. Existe $f(4) = \lim\limits_{x\to 4} f(x)$. Así la función $f(x)$ es continua en $x = 4$.

4. Veamos limites infinitos de la función $f(x)$ en $x = 2$
   Si $x < 2$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x}{x - 2} = -\infty$.
   Si $x > 2$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x}{x - 2} = \infty$.
   Esto implica que la función $f(x)$ es discontinua inevitable en $x = 2$, además la función $f(x)$ no está definida en $x = 0$ esto es, una asíntota vertical.

5. Veamos límites al infinito de $f(x)$ cuando x crece o decrece infinitamente.
   Para $x \to -\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{x - 2} = 3$
   Para $x \to +\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x - 2} = 3$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ es una asíntota horizontal.

Ejemplo 1.9.8 *Analice el comportamiento de la función definida por tramos la continuidad o discontinuidad definida en su dominio.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3 & x \leq 1 \\ 3x + 4 & x > 1 \end{cases}$$

Solución:

La representación gráfica de la función por tramos $f(x)$ y esto es:

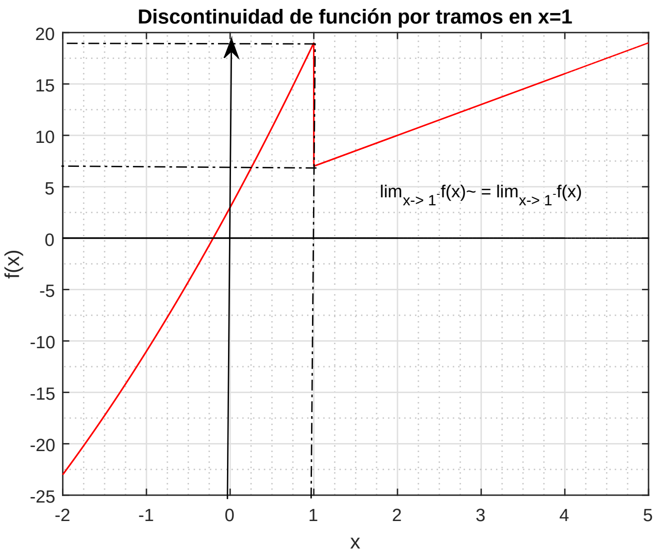


Figura 1.53: Función discontinua en $x = 1$

Veamos la función $f(x)$ es continua en el punto $x = 1$:

1. La imagen de $x = 1$ existe $f(1) = (x^2 + 5x + 3)|_1 = 9$ si existe.

2. Hallemos los límites laterales de la función $f(x)$ en $x = 1$, es decir:

   Si $x < 1$ entonces $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 5x + 3)|_1 = 9$

   Si $x > 1$ entonces $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x + 4)|_1 = 7$

   Por lo tanto los límites laterales existen, pero son distintos:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

   Esto nos garantiza que la función $f(x)$ es discontinua inevitable en $x = 1$ y se observa el gráfico, arriba.

1.9.1. Ejercicios propuestos

1. Estudie la continuidad o discontinuidad de la función definida en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 9 & x < -3 \\ (x-1)^2 - 7 & x \geq -3 \end{cases}$$

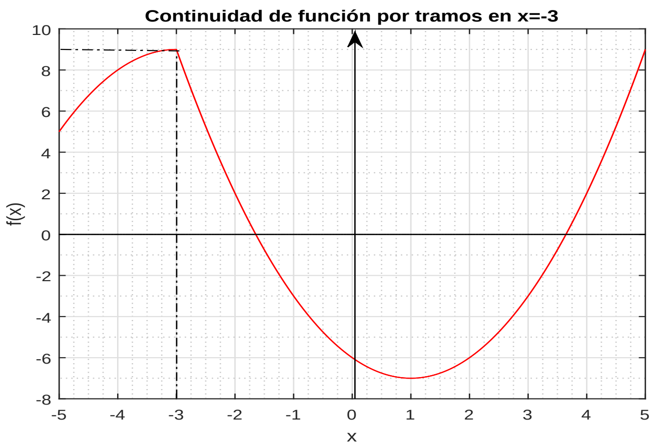


Figura 1.54: Función discontinua

2. Determine los valores de a, b de modo que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 2$ definida.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & x \leq 0 \\ a & 0 < x \leq 2 \\ bx - 3 & x > 2 \end{cases}$$

3. Estudie la continuidad o discontinuidad de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3-4x}$

4. Determine los valores de a, b de modo que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y $x = 2$ definida.

$$f(x) = \begin{cases} 2a & x \leq -2 \\ \dfrac{x^6 - 64}{x^4 - 16} & -2 < x \leq 2 \\ x + 2b & x > 2 \end{cases}$$

5. Estudie la continuidad o discontinuidad de $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^3+6x^2+5x-12}$

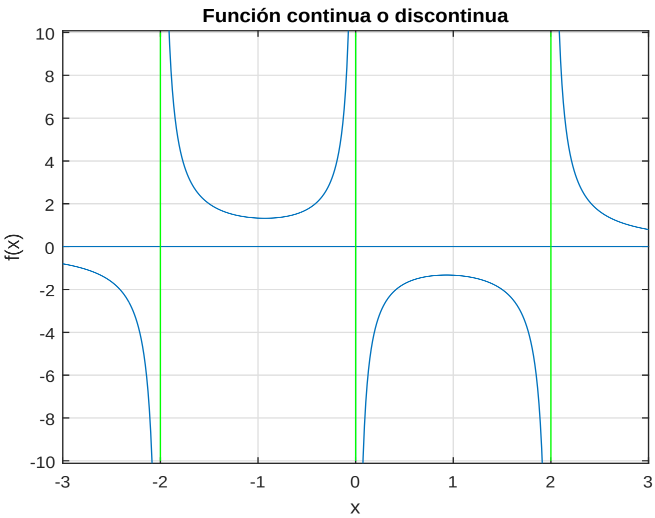


Figura 1.55: Función discontinua en x=1

6. Determine los valores de a, b de modo que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y $x = 1$ definida.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2a & x \leq -2 \\ 3ax + b & -2 < x \leq 1 \\ 8x - 3b & x > 1 \end{cases}$$

7. Calcule el valor de a si $a\epsilon\langle 0, \pi/2\rangle$ de modo que la función es continua en el punto a y definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} & x \neq a \\ \dfrac{1}{2a} & x = a \end{cases}$$

8. Estudie la continuidad o discontinuidad de $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 6x + 1}{x^2 - x}$

9. Determinar los valores de a, b de modo que la función sea continua en $x = -1$ y $x = 1$ en:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \leq -1 \\ ax + b & -1 < x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 3 & x > 1 \end{cases}$$

10. Determinar los valores de a, b de modo que la función sea continua en $x = -1$

y $x = 1$, además f(-1)=6 y $f(1) = 1$ en:

$$f(x) = \begin{cases} a - b(x-3)^2 & x \leq -1 \\ 3x + c & -1 < x \leq 1 \\ -4b(x-4)^2 + ax + 10 & x > 1 \end{cases}$$

11. Determinar los valores de a, b de modo que la función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2a & x \leq -2 \\ 3ax + b & -2 < x \leq 1 \\ 8x - 3b & x > 1 \end{cases}$$

12. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{ax^2 + bx + c}$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe y es distinto de cero , además cumple $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Halle los valores de a, b y c.

13. Determinar los valores de a, b de modo que la función sea continua en el intervalo abierto $\langle 06 \rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 3 \\ ax^2 + b & 3 < x \leq 5 \\ x^2 + 2 & x > 5 \end{cases}$$

14. Halle el valor de a de modo que la función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 5 & x < 1 \\ -3x + 8 & x \geq 1 \end{cases}$$

15. Analice el comportamiento de la función en su dominio, la continuidad y discontinuidad en el dominio respectivo:

$$f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & x \leq -\pi/2 \\ a \operatorname{sen} x + b & -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ 2\cos x & x > \pi/2 \end{cases}$$

16. Estudie la continuidad o discontinuidad de la función definida en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & -2 < x \leq -1 \\ 3x & -1 < x \leq 1 \\ -3x + 6 & 1 < x \leq 3 \\ x^3 - 30 & x > 3 \end{cases}$$

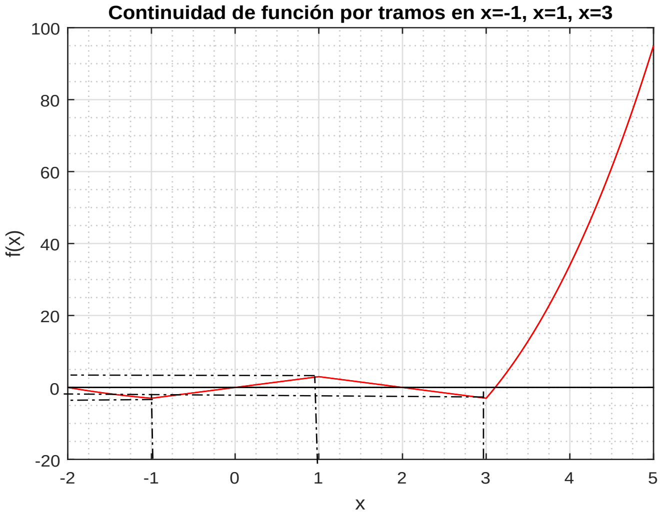


Figura 1.56: Función continua en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$

1.10. Aplicación de límites al contexto real

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real que representa un fenómeno físico, químico, económico, ecológico, ambiental, problemas demográficos de personas humanas o animales entre otros, pueden ser modelados y aplicados los conceptos de límites finitos, infinitos, al infinito o de la forma exponencial y determinar la aproximación de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$ o cuando $x \to \pm\infty$; éstos limites de $f(x)$ pueden existir o no las funciones reales.

Ejemplo 1.10.1 *La población de USA se puede modelar por el siguiente función logística.*

$$f(t) = \frac{197273000}{1 + (\exp)^{-0.03132(t-1913.125)}}$$

habitantes . Donde t: representa el tiempo en años. Hacer un gráfico que muestre la población de USA desde 1790 hasta 2000, en periodos de 10 años.

1. *Halle la población de USA para el año* 2020.

2. *Halle la población de USA para el año* 2100.

3. *Halle la población de USA si el tiempo crece infinitamente.*

Solución:

1. Consideremos el año cero, sea $t = 2000$ años entonces la población para el presente año fue:

$$\begin{aligned} f(2000) &= \lim_{t\to 2000} f(t) = \lim_{t\to 2000} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(2000-1913.125)}} \\ &= \lim_{t\to 2000} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(2000-1913.125)}} = \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(86.875)}} \\ &= \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(86.875)}} = \frac{197273000}{1+(\exp)^{2.7209}} \text{ habitantes} \\ &= \frac{197273000}{1+(\exp)^{-2.7209}} = \frac{197273000}{1+0.066} = 185091421 \text{ habitantes de USA.} \end{aligned}$$

2. Consideremos el año $t = 2020$ entonces la población para el presente año fue:

$$\begin{aligned} f(2020) &= \lim_{t\to 2020} f(t) = \lim_{t\to 2020} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(2020-1913.125)}} \\ &= \lim_{t\to 2020} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(106.875)}} = \frac{197273000}{1+(\exp)^{-3.3473}} \\ &= \frac{197273000}{1+0.0352} = 190568935 \text{ habitantes de USA.} \end{aligned}$$

3. Consideremos el año $t = 2100$ años entonces la población para el presente año fue:

$$\begin{aligned} f(2100) &= \lim_{t\to 2100} f(t) = \lim_{t\to 2100} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(2100-1913.125)}} \\ &= \lim_{t\to 2100} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(186.875)}} = \frac{197273000}{1+(\exp)^{-5.853}} \\ &= \frac{197273000}{1+0.002872} = 196708197 \text{ habitantes de USA.} \end{aligned}$$

4. Si el tiempo crece infinitamente, esto significa $t \to \infty$, entonces la población USA será: Analizamos el denominador de la función población USA $f(t)$. $(\exp)^{-0.03132(t-1913.125)} = (\exp)^{-0.03132(\infty-1913.125)} = 0$ entonces la población USA

será:

$$
\begin{aligned}
f(\infty) &= \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(t-1913.125)}} \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{197273000}{1+(\exp)^{-0.03132(\infty-1913.125)}} \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{197273000}{1+0} = 197273000 \text{ habitantes de USA.}
\end{aligned}
$$

Esto significa que la población USA se mantiene constante en el tiempo infinito, es más la población se hizo viejo.

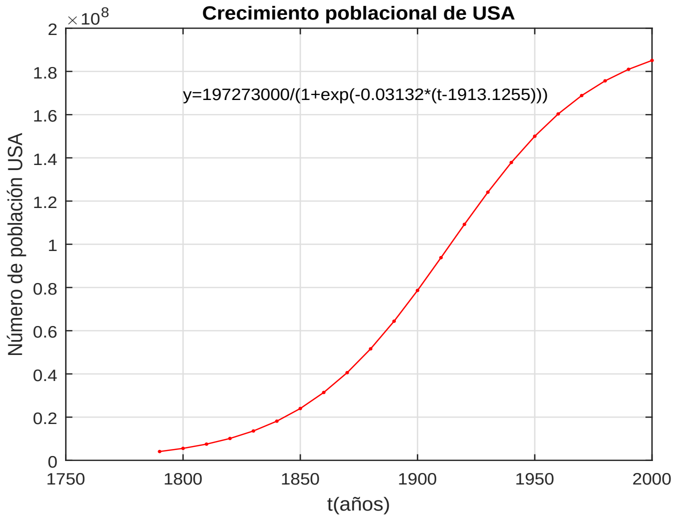


Figura 1.57: Límite de función poblacional USA

Ejemplo 1.10.2 *Un coche patrullero esta estacionado a* 60 *pies de un muro. La luz giratoria del techo del coche gira a un ritmo de media revolución por segundo. El ritmo al que se desplaza el haz de luz a lo largo del es el modelo matemático, definida por:* $v(t) = 188.5\sec^2\theta$ *pies por segundo; donde* t *indica tiempo en segundos, proceso de rotación.*

1. *Halle el límite de* $v(t)$ *al cabo de* $\theta = \pi/6$ *radianes y* $\theta = \pi/3$ *radianes*
2. *Halle la velocidad del haz de luz* $v(t)$ *al cabo de* $\theta = \pi/2$ *radianes*

Solución:

La representación gráfica del haz de luz en la pared del muro.

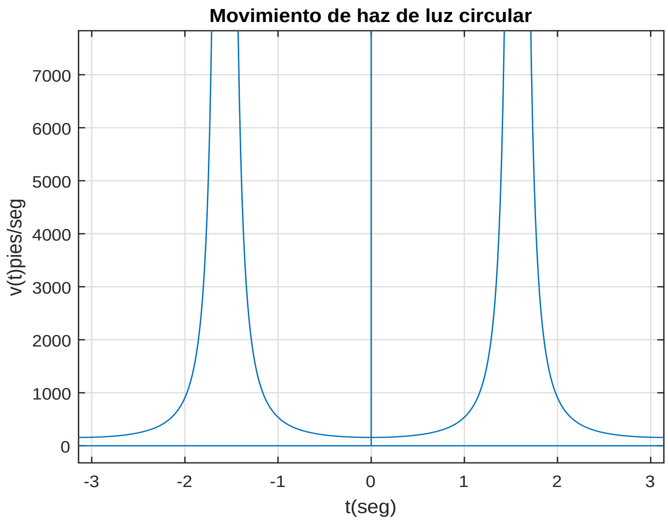


Figura 1.58: Movimiento del haz de luz

La función de posición del luz giratoria, aplicando de razones trigométricas

$$\tan\theta = \frac{r(t)}{60}$$

. entonces $r(t) = 60\tan\theta$ pies de radio arbitrario, uso de reglas de derivación la velocidad de giro es:
$v(t) = \dfrac{dr}{dt} = 60\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}$, pero $\dfrac{d\theta}{dt} = w = \pi$, reemplazando se tiene.
$v(t) = 60\sec^2\theta w(t) = 60\pi\sec^2\theta = 188.5\sec^2\theta$ pies por segundo
ésta es la velocidad de giro de la luz circulina.

1. Hallemos la velocidad de la circulina al cabo de $\theta = \pi/6$ radianes

$$\begin{aligned} v(\pi/6) &= \lim_{\theta\to\pi/6} v(t) = 188.5 \lim_{\theta\to\pi/6} \sec^2\theta \\ &= 188.5 \lim_{\theta\to\pi/6} \sec^2\theta = 188.5\sec^2\pi/6 = 217.66 \text{ pies por segundo.} \end{aligned}$$

2. Hallemos la velocidad de la circulina al cabo de $\theta = \pi/3$ radianes

$$\begin{aligned} v(\pi/3) &= \lim_{\theta\to\pi/3} v(t) = 188.5 \lim_{\theta\to\pi/3} \sec^2\theta \\ &= 188.5 \lim_{\theta\to\pi/3} \sec^2\theta = 188.5\sec^2\pi/3 = 377 \text{ pies por segundo.} \end{aligned}$$

3. Hallemos la velocidad de la circulina al cabo de $\theta = \pi/2$ radianes

$$\begin{aligned} v(\pi/2) &= \lim_{\theta\to\pi/2} v(t) = 188.5 \lim_{\theta\to\pi/2} \sec^2\theta \\ v(\pi/2) &= 188.5 \lim_{\theta\to\pi/2} \sec^2\theta = 188.5\sec^2\pi/2 = +\infty \end{aligned}$$

.

Ejemplo 1.10.3 *Un fabricante de cajas de madera desea construir cajas sin tapas de piezas cuadradas de madera de* 20 *cm por lado cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y luego doblando los lados respectivos hacia arriba.*

1. *Halle el volumen de la caja de madera cuando $x = 2cm$, $x = 5cm$, $x = 8cm$ y $x \to \infty$*

2. *Cual es el dominio de definición del volumen de caja y su representación gráfica.*

Solución:

1. Consideremos la altura del volumen de caja arbitraria x en centímetros, mientras la base $20 - 2x$ centímetros, además la base del volumen es cuadrado entonces el volumen de la caja será: $V(x) =$ (base de la caja) altura

   $V(x) = (20-2x)^2 x = (400-80x+4x^2)x = 400x-80x^2+4x^3$centímetros cúbicas.

   Hallemos el dominio de definición de la función volumen $V : [0, 10] \to \mathbb{R}$ $V(x) = 0$ entonces $400x - 80x^2 + 4x^3 = 0$, $x(20 - 2x)^2 = 0$ entonces $x = 0$, $x = 10$ cm. Entonces $V(x) = 400x - 80x^2 + 4x^3$ para todo $x \in [0, 10]$ cm.

2. Ahora hallemos los límites de la función volumen $V(x)$ en valores de x considerados.

   a) Si $x \to 2$,entonces el valor de $V(2)$ será, mediante uso del operador límite, esto es:
   $$\lim_{x\to 2} V(x) = \lim_{x\to 2}(400x - 80x^2 + 4x^3) = 512\text{cm}^3$$
   la caja de madera tiene esta capacidad de almacenar de ciertos productos.

   b) Si $x \to 5$,entonces el valor de $V(5)$ será, mediante uso del operador límite, esto es:
   $$\lim_{x\to 5} V(x) = \lim_{x\to 5}(400x - 80x^2 + 4x^3) = 500\text{cm}^3$$
   la caja de madera tiene esta capacidad de almacenar de ciertos productos.

c) Si $x \to 8$,entonces el valor de $V(8)$ será, mediante uso del operador límite, esto es:

$$\lim_{x\to 8} V(x) = \lim_{x\to 8}(400x - 80x^2 + 4x^3) = 128\text{cm}^3$$

la caja de madera tiene esta capacidad de almacenar de ciertos productos, pero ha disminuido la capacidad de almacenamiento.

d) Si $x \to \infty$,entonces el valor de $V(\infty)$ será, mediante uso del operador límite al infinito, esto es:

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \lim_{x\to\infty}(400x - 80x^2 + 4x^3) = \infty\text{cm}^3$$

la caja de madera tiene esta capacidad de almacenar de ciertos productos, pero ha disminuido la capacidad de almacenamiento.

Representación gráfica de la función de volumen de caja, esto es:

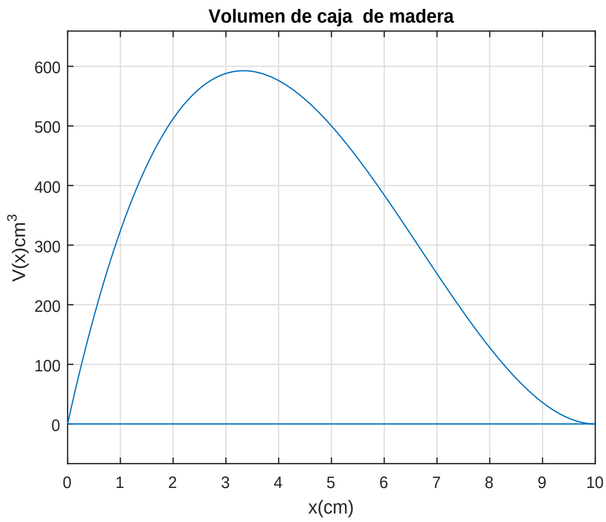


Figura 1.59: Volumen de caja en $[0, 10]$

Ejemplo 1.10.4 *Un cargador frontal para remoción de toneladas de material de cobre y zinc, adquirido en el año* 2000 *está en reventa en el tiempo arbitrario dado un modelo matemático* $R(t) = (200000(\exp)^{-t/5} + 50000)$ *mil dólares.*

1. *Halle el límite de la función reventa* $R(t)$ *en el año* 2020, 2030 *y* 2050.

2. *Cuál será el valor del cargador frontal al momento de su adquisición.*

3. *Que sucede del valor del cargador frontal cuando el tiempo crece infinitamente.*

Solución:

1. Hallamos el límite de la función del costo de cargador frontal al momento de la compra o adquisición, esto es: $t = 2000$, significa año cero $t = 0$ años.

$$\begin{aligned} R(0) &= \lim_{t\to 0} R(t) = \lim_{t\to 0}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) \text{ mil dólares.} \\ &= \lim_{t\to 0}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) = (200000(\exp)^{-0/5} + 50000) \\ &= 250000 \text{ mil dólares.} \end{aligned}$$

El cargador frontal al momento de su adquisición se pagó la suma de 250000 mil dólares.

2. Hallamos el precio del cargador frontal después de t años arbitrarios y esto es:

a) Para el año 2020 esto implica después de $t \to 20$ años, el precio será:

$$\begin{aligned} R(20) &= \lim_{t\to 20} R(t) = \lim_{t\to 20}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) \text{ mil dólares.} \\ &= \lim_{t\to 20}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) = (200000(\exp)^{-20/5} + 50000) \\ &= 53663.13 \text{ mil dólares.} \end{aligned}$$

Esto significa el precio del cargador frontal se ha devaluado en ésta cantidad.

b) Para el año 2030 esto implica después de $t \to 30$ años, el precio será:

$$\begin{aligned} R(30) &= \lim_{t\to 30} R(t) = \lim_{t\to 30}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) \text{ mil dólares.} \\ &= \lim_{t\to 30}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) = (200000(\exp)^{-30/5} + 50000) \\ &= 50495.75 \text{ mil dólares.} \end{aligned}$$

c) Para el año 2050 esto implica después de $t \to 50$ años, el precio será:

$$\begin{aligned} R(50) &= \lim_{t\to 50} R(t) = \lim_{t\to 50}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) \text{ mil dólares.} \\ R(50) &= \lim_{t\to 50}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) = (200000(\exp)^{-50/5} + 50000) \\ &= 50009.75 \text{ mil dólares.} \end{aligned}$$

A medida que transcurre el tiempo después de la compra del cargador frontal, se devalúa el precio de la máquina pesada y tiende al valor de 50000 mil dólares.

d) Cuando el tiempo crece infinitamente esto implica $t \to \infty$ años, el precio será:

$$\begin{aligned} R(\infty) &= \lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{t\to\infty}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) \text{ mil dólares.} \\ &= \lim_{t\to\infty}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) = (200000(\exp)^{-\infty/5} + 50000) \\ &= \lim_{t\to\infty}(200000(\exp)^{-t/5} + 50000) = (\frac{200000}{\infty} + 50000) = 50000 \text{ mil dólares.} \end{aligned}$$

A medida que crece el tiempo infinitamente el valor del cargador frontal, se devalúa y esto tiende a 50000 mil dólares.
Representación gráfica de la función de reventa del cargador frontal.

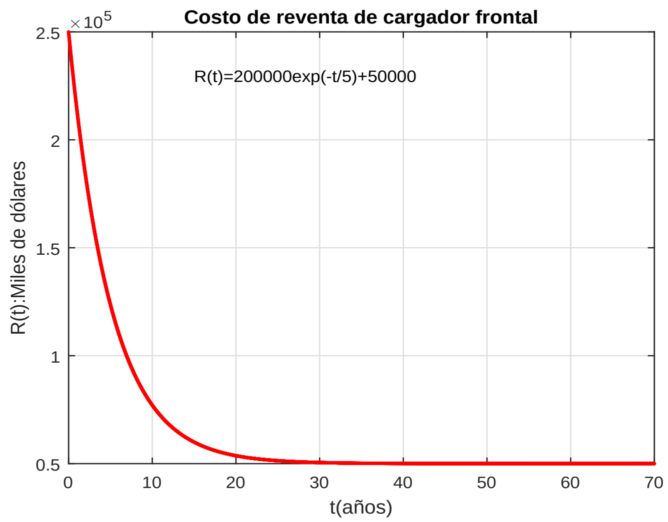


Figura 1.60: Función decreciente de costo de reventa

Ejemplo 1.10.5 *Analizar la continuidad o discontinuidad del flujo de turistas nacionales o internacionales que llegan a los albergues turísticos de la ciudad de Puerto Maldonado durante el año de 2015. La población demográfica de turistas está mediante el modelo matemático* $P(t) = \dfrac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}$ *cientos de personas, además halle el límite de función flujo de turistas en el mes de febrero y mes de junio del 2015.*

Solución:

Hallemos las asíntotas de la función numerador $t^2 - 5t + 4 = (t-4)(t-1) = 0$ entonces $t = 1$ representa mes de enero, $t = 4$ representa mes de abril, ésto implica la población de turistas descienden infinitamente esto es:

La función demográfica de turistas está definida $P(t)$ para todo $t \in \mathbb{R} - \{1, 4\}$ y usamos el operador limite en puntos de asíntotas.

1. Sea $t = 1$ mes de enero la función $P(t)$ de turistas en la ciudad de Puerto Maldonado resulta.

   Si $t < 1$ entonces $t \to 1^-$ entonces $\lim\limits_{t\to 1^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}$

   $$\lim_{t\to 1^-} P(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{t^2+t+4}{(t-4)(t-1)} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

   Esto significa en el mes de enero la población de turistas ha descendido infinitamente.

   Si $t > 1$ entonces $t \to 1^+$ entonces $\lim\limits_{t\to 1^+} P(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}$

   $$\lim_{t\to 1^+} P(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{t^2+t+4}{(t-4)(t-1)} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

   Esto significa para el mes de enero la población de turistas es infinita.

2. Sea $t = 4$ mes de abril la población de turistas en la ciudad de Puerto Maldonado resulta.

   Si $t < 4$ entonces $t \to 4^-$ entonces $\lim\limits_{t\to 4^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 4^-} \dfrac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}$

   $$\lim_{t\to 4^-} P(t) = \lim_{t\to 4^-} \frac{t^2+t+4}{(t-4)(t-1)} = \frac{32}{0^-} = -\infty$$

   Si $t > 4$ entonces $t \to 4^+$ entonces $\lim\limits_{t\to 4^+} P(t) = \lim\limits_{t\to 4^+} \dfrac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}$

   $$\lim_{t\to 4^+} P(t) = \lim_{t\to 4^+} \frac{t^2+t+4}{(t-4)(t-1)} = \frac{32}{0^+} = +\infty$$

   Esto significa en los meses de enero y abril la población de turistas no existe y la función $P(t)$ es discontinua inevitable.

   Representación gráfica de la población de turistas en la ciudad de Puerto Maldonado en el 2015.

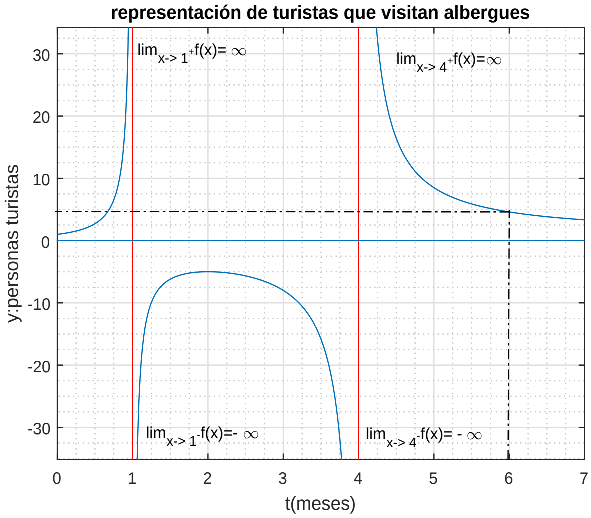


Figura 1.61: Función creciente, decreciente de turistas que visitan albergues

Hallemos la continuidad de la población $P(t)$ de turistas en el año 2015, en el mes de junio $t=6$ esto es:

Si $t<6$ entonces $t\to 6^-$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 6^-} P(t) &= \lim_{t\to 6^-}\frac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}\\ &= \lim_{t\to 6^-}\frac{t^2+t+4}{(t-4)(t-1)}\\ &= \frac{46}{10}=460 \text{ turistas}\end{aligned}$$

Si $t>6$ entonces $t\to 6^+$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 6^+} P(t) &= \lim_{t\to 6^+}\frac{t^2+t+4}{t^2-5t+4}\\ &= \lim_{t\to 6^+}\frac{t^2+t+4}{(t-4)(t-1)}\\ &= \frac{46}{10}=460 \text{ turistas}\end{aligned}$$

Los límites laterales son iguales $\lim\limits_{t\to 6^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 6^+} P(t) = 460$ turistas en el mes de junio , por lo tanto existe el $\lim\limits_{t\to 6} P(t) = 460$ turistas en el me de junio del 2015.

Ejemplo 1.10.6 *Una fábrica de cierto producto de zapatillas ha encontrado un modelo matemático de ventas por año y definida como* $f(x)=\dfrac{8x^2-3x+7}{2x^2-3x+1}$ *millones de* *dólares por año, donde x representa millones de dólares invertidas en la producto de artículos de zapatillas y luego venderlas.¿Cuál es la máxima venta de zapatillas que puede esperar la empresa en el tiempo infinito?*

Solución:

Representación gráfica del modelo de ventas de zapatillas:

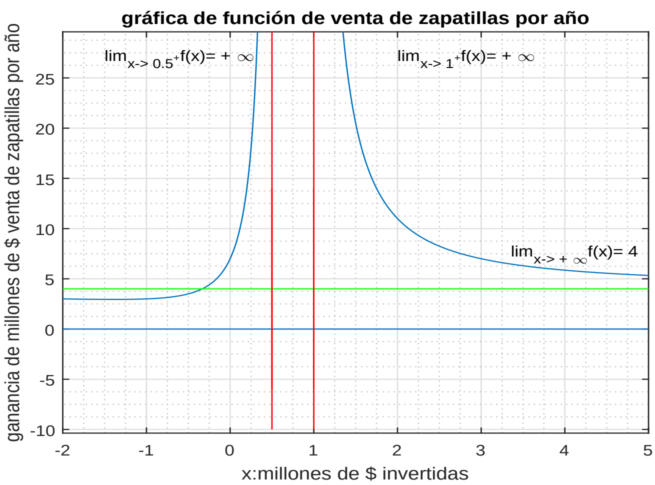


Figura 1.62: Límite de funciones al infinito e infinito

Ha medida que haga mayor inversión la empresa en la producción de zapatillas, existirá mayores ventas de la empresa, si invierte mas millones de dólares, se necesita conocer que valor que se aproxima la función de ventas en millones de dólares por año $f(x)$, cuando la empresa invierte un capital muy grande, esto es $x \to \infty$, utilizamos concepto de limites al infinito esto es:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x+7}{2x^2-3x+1} \text{ millones de dólares por año.}$$

Sabemos por propiedad de limites al infinito $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} \to 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ sea par o impar.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{8-3\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{2-3\frac{1}{x}+1\frac{1}{x^2}} \text{ millones de dólares por año}\\ &= \frac{8}{2} = 4 \text{ millones de dólares por año}\end{aligned}$$

Esto implica que por más que se invierta muchos millones de dólares americanos, siempre la venta máximas será de $f(x = \infty) = 4$ millones de dólares por año más ni menos.

Ejemplo 1.10.7 *La producción de un artículo no consumible de una máquina ensamblador de juguetes electrónicos encontró un modelo matemático expresado por* $P(x) = 400(1 - (\exp)^{-0.035x})$ *juguetes por día, donde* x *representa dias. Halle la cantidad de juguetes producidas por la máquina ensambladora al cabo de* 5 *dias y* 15 *dias,* 30 *dias, además el número máximo de juguetes al tiempo infinito.*

Solución:
Utilizamos los conceptos de límites finitos de una función real para los dias considerados.

1. Sea $x = 5$ días entonces la producción de la máquina ensambladora de $P(5)$ resulta:

$$\begin{aligned} P(5) &= \lim_{x\to 5} P(x) = \lim_{x\to 5} 400(1 - (\exp)^{-0.035x}) \\ &= \lim_{x\to 5} 400(1 - (\exp)^{-0.035x}) = 400(1 - (\exp)^{-0.035(5)}) \\ &= 64 \text{ juguetes por día} \end{aligned}$$

2. Sea $x = 15$ días entonces la producción de la máquina ensambladora de $P(15)$ resulta:

$$\begin{aligned} P(15) &= \lim_{x\to 15} P(x) = \lim_{x\to 15} 400(1 - (\exp)^{-0.035x}) \\ &= \lim_{x\to 15} 400(1 - (\exp)^{-0.035x}) = 400(1 - (\exp)^{-0.035(15)}) \\ &= 163 \text{ juguetes por día} \end{aligned}$$

3. Sea $x = 30$ días entonces la producción de la máquina ensambladora de $P(30)$ resulta:

$$\begin{aligned} P(30) &= \lim_{x\to 30} P(x) = \lim_{x\to 30} 400(1 - (\exp)^{-0.035x}) \\ &= \lim_{x\to 30} 400(1 - (\exp)^{-0.035x}) = 400(1 - (\exp)^{-0.035(30)}) \\ &= 260 \text{ juguetes por día} \end{aligned}$$

4. La máxima producción de la máquina ensambladora es cuando el tiempo sea muy grande, esto es:

$$\begin{aligned} P(\infty) &= \lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} 400(1-(\exp)^{-0.035x}) \\ &= \lim_{x\to\infty} 400(1-(\exp)^{-0.035x}) = 400(1-(\exp)^{-0.035(\infty)}) \\ &= 400 \text{ juguetes por día} \end{aligned}$$

La representación gráfica de la función ensambladora de juguetes de una máquina ensamblador de juguetes electrónicos encontró un modelo matemático expresado por $P(x) = 400(1-(\exp)^{-0.035x})$ juguetes por día es:

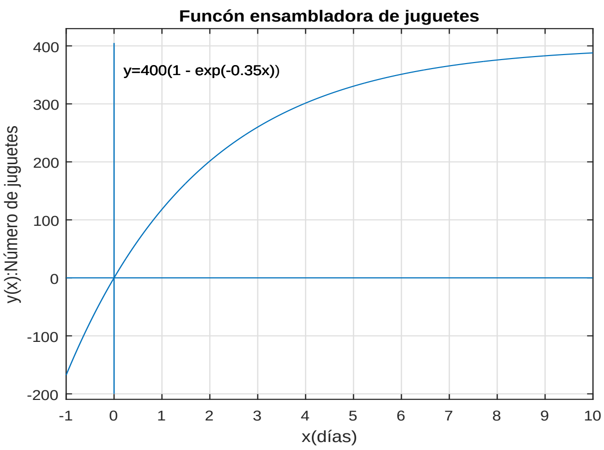


Figura 1.63: Límite de funciones al infinito

Ejemplo 1.10.8 *La población inicial de palomas es* 8000 *en la Plaza de Armas de la ciudad de Cusco. Si un Técnico de aves nos da una información que el crecimiento de la población es aproximadamente anual es mediante el modelo matemático de,* $P(t) = 8000(1+0.85t+0.5t^2+0.2t^3)$ *palomas por año.*

1. *Halle la población de palomas al cabo de* 5 *años.*

2. *Halle la población de palomas al cabo de* 10 *años*

3. *Halle la población de palomas al cabo de* 20 *años*

Solución:

$$
\begin{aligned}
P(5) &= 8000 \lim_{t\to 5}(1+0.85t-0.5t^2+0.2t^3) = 142000 \text{ palomas}\\
P(10) &= 8000 \lim_{t\to 10}(1+0.85t-0.5t^2+0.2t^3) = 1276000 \text{ palomas}\\
P(15) &= 8000 \lim_{t\to 15}(1+0.85t-0.5t^2+0.2t^3) = 4610000 \text{ palomas}
\end{aligned}
$$

Estas son limites finitos aplicados a funciones de crecimiento de población de aves en la ciudad del Cusco y su representación gráfica es:

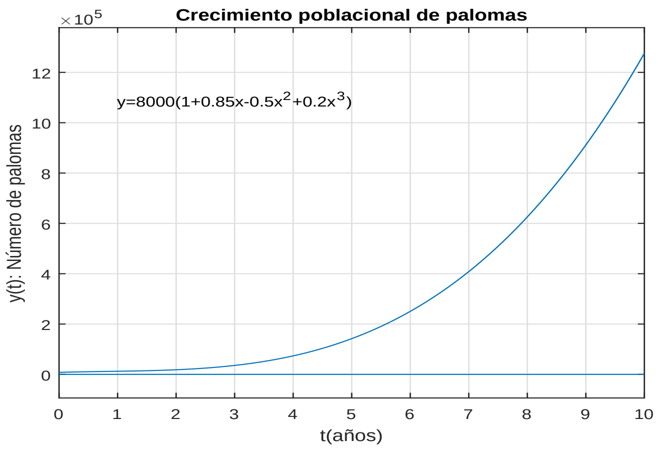


Figura 1.64: Límite finito de funciones

Ejemplo 1.10.9 *Una escalera de la Compañía de Bomberos* 25 *pies de longitud, esta apoya a una pared de una casa. Si se desplaza el pie de la escalera de modo que se aleja la base de la casa a una razón de* 2 *pies por segundo. Su extremo superior descenderá por la pared de la casa mediante un modelo matemático de* $v(x) = \dfrac{10x}{\sqrt{625-x^2}}$ *pies por segundo, donde* x*: es la distancia entre el pie de la pared y la escalera apoya en la casa.Helle:*

1. *La velocidad de descendencia de la escalera cuando la posición de la base sea* $x = 7$ *pies*

2. *La velocidad de arrastre de la escalera cuando la posición de la base sea* $x = 15$ *pies*

3. *La velocidad de arrastre si* x *se aproxima a* 25 *pies por la izquierda.*

Solución:

La velocidad de arrastre de la escalera, apoyada a una pared verticalmente para cualquier posición esto es,$v(x) = \dfrac{10x}{\sqrt{625 - x^2}}$ pies/seg :

Cálculo de función velocidad de arrastre $v(x)$ cuando $x \to 7$ pies.

$$\begin{aligned} v(7) &= \lim_{x\to 7} \frac{x}{\sqrt{625 - x^2}} = \frac{70}{\sqrt{625 - (7)^2}} \\ v(7) &= \frac{70}{\sqrt{625 - (7)^2}} = \frac{70}{24} = 2.9 \text{ pies por segundo desciende la escalera.} \end{aligned}$$

Cálculo de límite de la función velocidad de arrastre $v(x)$ cuando recorre aproximadamente una distancia vertical de $15pies$, esto es:

$$\begin{aligned} v(15) &= \lim_{x\to 15} \frac{10x}{\sqrt{625 - x^2}} = \frac{150}{\sqrt{625 - (15)^2}} \\ v(15) &= \frac{150}{\sqrt{625 - (15)^2}} = \frac{150}{20} = 7.5 \text{ pies por segundo desciende la escalera.} \end{aligned}$$

Cálculo de velocidad de arrastre $v(x)$ cuando recorre aproximadamente una distancia vertical de $25pies$. Esto es una situación irreal.

$$\begin{aligned} v(25^-) &= \lim_{x\to 25^-} \frac{10x}{\sqrt{625 - x^2}} = \frac{250}{\sqrt{625 - (625)^2}} \\ v(25^-) &= \frac{250}{\sqrt{625 - (25)^2}} = \frac{150}{0^-} = -\infty \text{ no existe} \end{aligned}$$

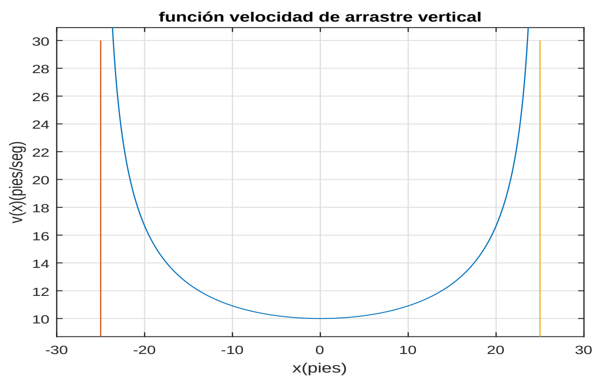


Figura 1.65: Límite finito de funciones

Capítulo 2

Derivada de funciones reales

2.1. Introducción

Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal, surge en Grecia y posteriormente es fundamentado de manera formal y rigurosa por Isaac Newton(1642-1727) y Gottfried Leibniz(1646-1716), quienes en sus investigaciones respectivas conservan la naturaleza geométrica, y conceptuaron a la derivada como un cociente incremental de una función dependiente respecto a la variable independiente y no como una concepción física, esto es la velocidad; finalmente desarrollan estructuras del cálculo diferencial y cálculo integral.
En matemáticas superior, la derivación es una de las operaciones del cálculo diferencial, se efectúa con las funciones reales que describen numerosos problemas de ciencias formales y sociales, apoyadas en estructuras del problema de pendientes, en problemas de velocidades y aceleraciones, en problema de variaciones de cantidades específicas de cierta cantidad física, química, economía, cambios climáticos, problemas relacionados al medio ambiente, problemas de procesos agroindustriales, cadena de alimentación agroforestales, repoblamiento de plantas maderables y no maderables después del incendio, crecimiento o extinción de especies de fauna y flora en el tiempo constituyen problemas de razón de cambio o problemas de pendientes geométricos, problemas de máximos y mínimos.
Cuando surgen cuestiones concernientes de razón de cambio de dos cantidades de variables uno dependiente, con respecto a otra variable independiente, de tal modo la variación de estas variables independientes sean tan pequeñas como se quiera, significa que estamos en el ámbito del campo Cálculo Diferencial. Si una variable de

una cantidad de valor inicial pasa de a otro valor final, entonces en dicha variable ha sufrido o ha tenido un incremento dimensional (positivo o negativo), para ello basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial, y se denota o expresa la diferencia mediante el símbolo $\Delta x = x - x_0$, que se lee delta de x, el incremento puede resultar positivo o negativo, dependiendo si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro, [3]. Del mismo, se obtiene incremento de la variable dependiente denominada función $y = f(x)$ mediante la notación $\Delta y = y - y_0$, se lee delta de y, el incremento puede resultar positivo o negativo, dependiendo si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro.
Ahora definimos el cociente del incremento de las variables o razón de cambio de variables expresadas, pero puesto en limite como: $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ésta define la derivada de una función $y = f(x)$ respecto a la variable x o de una cantidad específica objeto o cuestiones subjetivas como la variación relativa de cantidades específicas respecto a otras cantidades independientes muy pequeñas. En física el concepto de derivada de una función de posición de una partícula denotada por $s(t)$ (metros, pies, cm, etc), los cuales describen las distintas posiciones que toma la partícula sobre la trayectoria en distintos instantes de tiempo, es decir la derivada de ésta función de posición, es la velocidad del movimiento de una partícula en el instante de tiempo y la aceleración de la partícula en movimiento, viene a ser la rapidez de la velocidad en un intervalo de tiempo, [10], [21].
La reproducción de bacterias benignas, hongos comestibles, insectos, virus etc en un determinado laboratorio, en el tiempo establecido y necesario, nos proporciona medios de aplicación del concepto de derivada en el área de Biología, la variación de costos, utilidades, pérdidas de producción, costos marginales es la aplicación de la derivada en el área de ciencias económicas, sociales, ambientales y entre otros.

2.2. Problema de tangentes, velocidades y razón de cambio

2.2.1. Problema de tangentes(Concepto geométrico)

Dada una curva C denotada $y = f(x)$, se desea calcular la pendiente de la recta tangente a la curva C, en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, entonces se considera cualquier otro

punto arbitrario sobre la curva C, es decir, $Q = (x, y)$; donde $x \neq x_0$. Definamos la pendiente de la recta secante sobre la recta $\overrightarrow{PQ}$, mediante el cociente de variaciones de la función y respecto a la variable independiente x, esto es: $m_s = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Ahora analizamos el comportamiento de la función cuando x sea tan cercano a x_0, es decir cuando el punto Q sobre la curva se aproxima al punto P_0 sobre la curva C, entonces se tiene la pendiente de la recta tangente en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$. En conclusión la pendiente de la recta secante de la curva C se aproxima a la pendiente de la recta tangente de la curva C, en el punto P_0 y tenemos la expresión simbólica, [21], [19].

$$m_T = \lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx}$$

La representación gráfica de $f(x)$ es:
Muchos problemas de situación real son descritas por modelos matemáticos del análi-

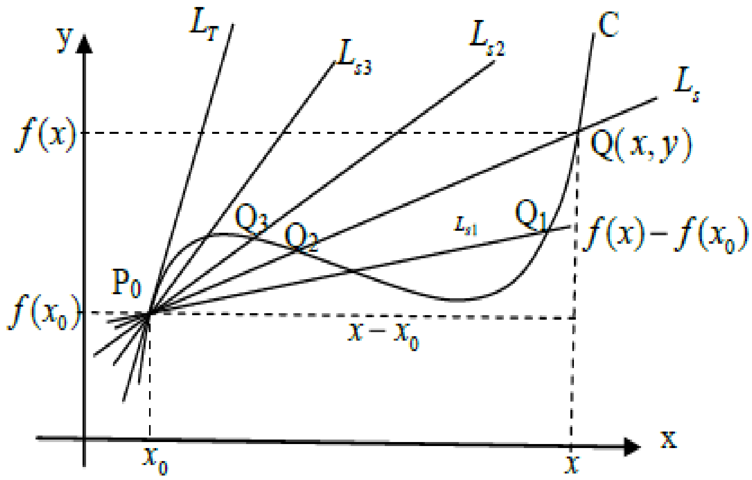


Figura 2.1: Pendiente de la recta tangente a la curva C

sis matemático, pueden transferirse o depender de ciertas características reales creadas por la intervención de la mano del hombre o sin la participación de ella es decir fenómenos naturales que ocurren con el trascurrir del tiempo, en este sentido se acredita a los hombres la invención del cálculo. El problema de tangentes, permite comprender y desarrollar técnicas en la solución de una gama de problemas sociales, físicos, económicas, políticos y ambientales y otros constituyen la columna vertebral de la ciencia y la tecnología en la actualidad que pueden ser expresados mediante conceptos de derivadas. Notación de la derivada de una función $f'(x)$ respecto a la variable independiente x.

1. Sea $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, Notación según Lagrange, y se lee f prima de x.

2. Sea $D_x f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Notación según Cauchy, se lee D sub x de la función $f(x)$.

3. Sea $s'(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, Notación según I. Newton, se lee $s'(t)$ velocidad del móvil. y se puede definir la aceleración del móvil como la segunda derivada de $s''(t)$ respecto al tiempo t.

4. Sea $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
   Notación de G. Leibniz, usualmente se utiliza la notación de Lagrange $f'(x)$.

Ejemplo 2.2.1 *Usando la definición de derivada de una función, halle la primera derivada. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva C:* $y = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ *en el punto* $P_0 = (-1.5, 9)$ *y así mismo en el punto* $P' = (2.2, -11.4)$.

Solución:
representación gráfica:

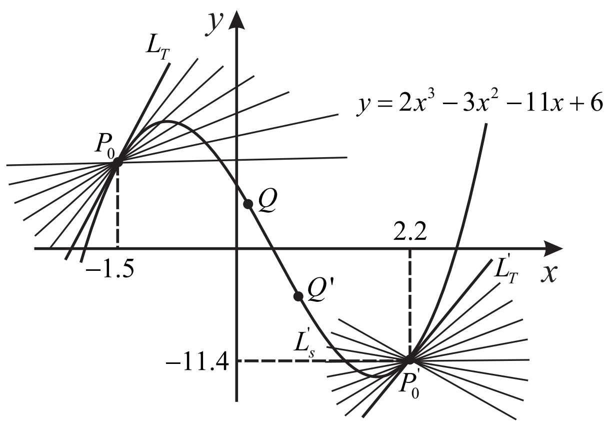


Figura 2.2: Pendientes de la rectas tangentes a la curva C

Analizando la gráfica de la función definida se tiene, una familia de rectas secantes que cortan a la curva y que pasan por los puntos P_0 y P' , además los puntos Q y Q'

se trasladan sobre la curva como rectas secantes aproximándose cada vez a una recta tangente en los puntos indicados como se observa en la figura 2.2

1. Usando la definición de pendiente de una recta secante, tomar un punto arbitrario $Q = (x, y)$ sobre la curva C y punto de paso $P_0 = (-1.5, 9)$, sustituyendo en la expresión simbólica de derivada de una función se tiene:
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{x\to -1.5}\frac{f(x)-f(-1.5)}{x+1.5} = \lim_{x\to -1.5}\frac{2x^3-3x^2-11x-3}{x+1.5}\\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{x\to -1.5}\frac{(x+1.5)(x^2-6x-2)}{x+1.5} = \lim_{x\to -1.5}(x^2-6x-2)\end{aligned}$$

2. La pendiente de la recta tangente a la curva es:
$m_T = \lim_{x\to -1.5} m_s = \lim_{x\to -1.5}(x^2-6x-2) = 11.5$ entonces $\alpha = arctag(11.5) = 85$

3. La recta tangente a la curva C que pasa por el punto P_0 esto es:$y - y_0 = m_T(x - x_0)$, mientras la recta normal a la curva es: $y - y_0 = -\dfrac{1}{m_T}(x - x_0)$, en efecto:
L_T: Recta tangente a la curva C, $y - 9 = 11.5(x + 1.5)$
L_N: Recta normal a la curva C, $y - 9 = -\frac{1}{11.5}(x + 1.5)$

4. Usando la definición de pendiente de una recta secante, tomar un punto arbitrario $Q' = (x, y)$ sobre la curva C y punto de paso $P_0' = (2.2, -11.42)$, sustituyendo en la expresión simbólica de derivada de una función se tiene:
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{x\to 2.2}\frac{f(x)-f(2.2)}{x-2.2} = \lim_{x\to 2.2}\frac{2x^3-3x^2-11x+17.42}{x-2.2}\\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{x\to 2.2}\frac{(x-2.2)(2x^2+1.4x-7.92)}{x-2.2} = \lim_{x\to 2.2}(2x^2+1.4x-7.92)\end{aligned}$$

5. La pendiente de la recta tangente a la curva es:
$m_T = \lim_{x\to 2.2} m_s = \lim_{x\to 2.2}(2x^2 + 1.4x - 7.92) = 4.84 \therefore \alpha = arctag(4.84) = 78^o$

6. La recta tangente y la normal a la curva C que pasa por el punto P_0' esto es:
L_T: Recta tangente a la curva C, $y + 11.42 = 4.84(x - 2.2)$
L_N: Recta normal a la curva C, $y + 11.42 = -\frac{1}{4.84}(x - 2.2)$

2.2.2. Problema de velocidades(concepto físico)

Examinar el movimiento de un cuerpo solido o móvil, el lanzamiento de un proyectil verticalmente o caída de cuerpo libre o rotacional de un pistón dentro del cilindro

de una moto. Sea la distancia o posición del móvil $s(t)$ que depende del tiempo t, luego se puede medir la posición inicial $s(t_0)$ es decir para un tiempo de inicio t_0. De modo que la función velocidad se define como:
Sea $s = f(t)$ la posición arbitraria del móvil en tiempo arbitrario t y así mismo se tiene la posición después de un tiempo $s_1(t) = f(t + \Delta t)$ esto es $t + \Delta t$ entonces la velocidad del móvil será:

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{t \to t_0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t - t_0} = \frac{ds}{dt} \text{ expresa la velocidad del móvil en } t \\ a(t) &= \lim_{t \to t_0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} \text{ expresa la aceleración del móvil en } t \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2 *Investigar el movimiento parabólico de un objeto (pelota), producida por acción de la gravedad $g = 32 pies/s$, se lanza hacia arriba desde una plataforma del observatorio de Obelisco en la ciudad de Puerto Maldonado, que tiene 120 pies de altura desde el suelo, el modelo matemático que describe la trayectoria del objeto (pelota) es: $h(t) = -16t^2 + 86t + 170$ pies. Calcule la velocidad instantánea después de $t = 4$ segundos que se lanzó la pelota, altura máxima que alcanza la pelota medido desde el suelo y el tiempo cuando la pelota toca el suelo.*

Solución:
La representación geométrica del fenómeno físico de movimiento parabólico.

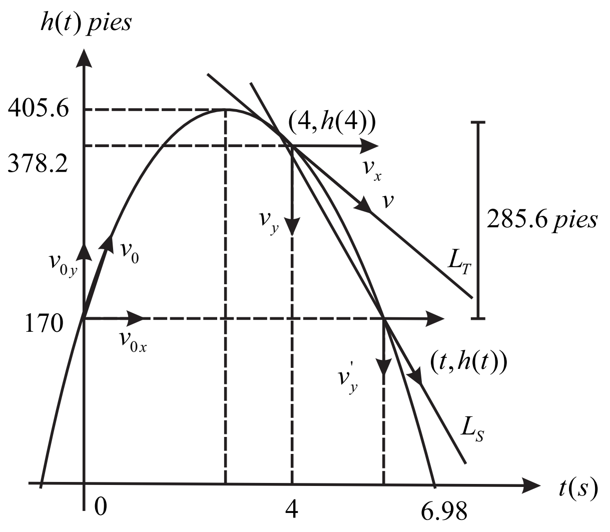


Figura 2.3: Problema de movimiento parabólico

Analizando la gráfica de la función altura $h(t)$, que describe la trayectoria de la pelota lanzado a partir del sótano y se observa un movimiento parabólico, se traza una recta secante que corta a la parábola en dos puntos. Sea el punto de paso $P_0 = (4, 258)$, luego la se traslada realizando una trayectoria continua, finalmente la recta secante se aproximándose cada vez a una recta tangente al cabo de $t = 4$seg como se observa el fenómeno físico.

Determinamos la función velocidad en cualquier tiempo, usando la definición de derivada de una función en $t = 4$

$$\begin{aligned}
v_y(t) &= \lim_{t\to 4}\frac{s(t)-s(4)}{t-4} = \lim_{t\to 4}\frac{-16t^2+86t-88}{t-4}\\
v_y(t) &= \lim_{t\to 4}\frac{(t-4)(-32t+86)}{t-4} = \lim_{t\to 4}(-32t+86)\\
v_y(4) &= \lim_{t\to 4}(-32t+86) = -43\text{pies/seg}
\end{aligned}$$

La aceleración de la gravedad arbitraria es $a_y = -32\text{pies/seg}^2$

2.2.3. El problema de razón de cambio

Consideramos una función $y = f(x)$ que representa una cantidad específica dependiente de otra cantidad x (variable independiente). Dada una cantidad x que cambia de x_1 a x_2 entonces el incremento de x denotada por $\Delta x = x_2 - x_1$, así mismo ocurre el incremento en la variable dependiente y denotado por siguiente expresión $\Delta y = y_2 - y_1$.
Definimos el cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Definimos razón de cambio instantáneo:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_1}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Los inventores del cálculo diferencial fueron los matemáticos Isaac Newton para resolver problemas de física y astronomía; y por Godofredo Leibniz para resolver problemas de geometría y finalmente con mayor rigor axiomático y complejo fue tratado por Juan D´Lambert, Lipsnitz entre otros, [4], [21].

Ejemplo 2.2.3 *Establecer el ritmo de crecimiento de la población de la región de Madre de Dios que en la actualidad la población elector es* 70, 000 *habitantes en* 2016*, luego se propone incrementar para el siguiente proceso electoral a* 150, 000 *habitantes en* 2021.

Solución: Usamos razón de cambio instantáneo poblacional en la region de Madre de Dios.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(2021)-y(2016)}{2021-2016}\\ &= \frac{150000-70000}{5}=36000 \text{ habitantes por año}\end{aligned}$$

Si la población de Puerto de Maldonado crece con este ritmo, entonces el año 2021 sería 160000 habitantes, para verificar esta aproximación se tendrá que verificar mediante Censo Nacional de esta época, explicar las razones de exceso o disminución de la población en la region Madre de Dios, apoyados en los factores climatológicos, ambientales, o enfermedades que pueden extinguir a la población, sino a las especies de fauna y flora, además de contar con oportunidades de trabajo, para la subsistencia de la raza humana.

Definición 2.1 (Concepto de derivada de una función real) *Una función $f : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)$ sea continua en un punto x_0 del dominio de definición. La derivada de la función real $f(x)$ está definido como la aplicación y puesto en límite, es decir:*

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x)$$

siempre que existe el limite.

$$f'(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_{0-}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_{0+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

son llamados limites laterales de $f(x)$ en x_0 , [13], [18], [21].

Definición 2.2 (Interpretación geométrica de la derivada de una función) *El significado geométrico de la derivada de una función $f(x)$ en un punto fijo P_0 sobre la curva: C y otro punto arbitrario Q sobre la curva: C y trazamos una recta secante entre estos dos puntos, cuya pendiente de la recta secante L_S es el cociente de las variaciones, [18], [21].*

$$m_S=\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h+x_0-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La recta secante que pasa por P_0 y un punto arbitrario Q ocupa diversas posiciones sobre la trayectoria C: de rectas secantes definido por la ecuación $y-y_0=m_S(x-x_0)$.

Ahora si el punto Q se aproxima indefinidamente al punto P_0, siguiendo la trayectoria de la curva C:, entonces la pendiente de la recta secante m_S se aproxima a la pendiente de la recta tangente m_T que pasa por el punto de paso P_0 , esto es:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} m_S$$

y se observa la gráfica.

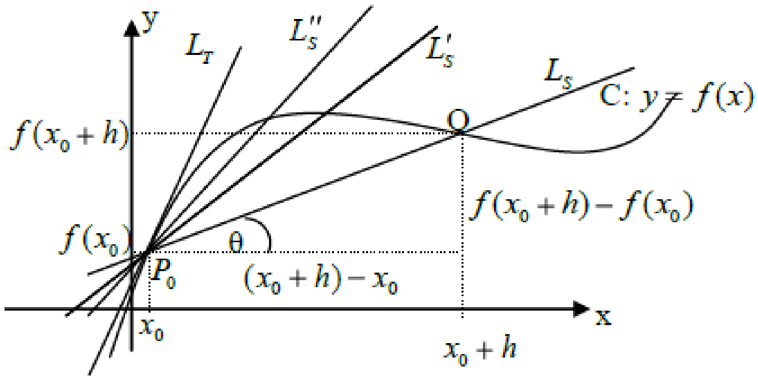


Figura 2.4: Interpretación geométrica: Derivada de una f(x)

Finalmente establecemos las rectas tangente y normal a la curva C: $y = f(x)$, que pasa por el punto $p_0 = (x_0, y_0)$, estos son:

$$L_T : y - y_0 = m_T(x - x_0) \quad \text{y} \quad L_N : y - y_0 = -\frac{1}{m_T}(x - x_0)$$

Definición 2.3 (Interpretación física de la derivada de una función) *El significado físico de la derivada de una función de desplazamiento o posición de un móvil $s(t)$, que describe la trayectoria del movimiento de una partícula, siguiendo una trayectoria rectilínea o curvilínea definida por una relación funcional de posición $s(t)$ con unidad de medida en el sistema internacional(m, cm, pies, km etc.) en instante de tiempo t unidad de medida (segundos. Minutos, horas etc.)*
Se considera que la partícula se encuentra inicialmente en la posición $s(t_0)$, al cabo de t_0 mas tarde en el ubicada en la posición $s(t)$ en el tiempo t.

1. Definimos la velocidad promedio de la partícula o móvil $s(t)$ mediante la expresión matemática:

$$v_m(t) = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

2. Definamos la velocidad instantánea en t_0, esto es:

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} v_m(t) = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

3. Definimos la aceleración promedio de la partícula o móvil $s(t)$ mediante la expresión matemática:

$$a_m(t) = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

4. Definamos la aceleración instantánea en t_0, esto es:

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0} a_m(t) = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

Teorema 2.2.1 *Para que una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea derivable en el punto $x_0 \in D \cap D'$ es necesario y suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + h \in D$ entonces $f(x_0+h) = f(x_0) + c \cdot h + r(h)$ donde $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, en caso afirmativo se tiene $c = f'(x_0)$*

Observación: Si $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D \cap D'$. La derivada de la función en el punto x_0 es el límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Bien entendido, límite anterior puede existir o no. Si existe se dice $f(x)$ es derivable en el punto x_0. Cuando existe la derivada $f'(x)$ en todo los puntos $x \in D \cap D'$.
Se dice que la función $f : D \to \mathbb{R}$ $f(x)$ es derivable en el conjunto D.
Obteniéndose una nueva función $f' : D \cap D' \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ llamada función derivable de $f(x)$. Si $f'(x)$ es continua se dice que $f(x)$ es de clase $\mathbb{C}^{\mathbb{1}}$.

Teorema 2.2.2 *Una función $f(x)$ es continua en los puntos donde es derivable. Si existen ambas derivadas laterales $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ entonces $f(x)$ es continua en el punto x_0*

Ejemplo 2.2.4 *Determine la velocidad y aceleración del móvil(gato motes) que se desplaza mediante la función de posición definida por $s(t) = t^4 - 3t^3 + 9t^2 + 26t - 3$ pies y el tiempo tseg, arbitraria y al cabo de 2 segundos.*

Solución:

1. Hallemos la velocidad promedio del gato montes en $t = 2$ seg

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{s(t)-s(2)}{t-2}\\
v(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{t^4-3t^3+9t^2+26t-3-77}{t-2}\\
v(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^3-t^2+7t+40)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t^3-t^2+7t+40) = 58\text{pies/seg}
\end{aligned}$$

2. La velocidad instantánea del gato montes en cualquier instante de tiempo.

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \text{ velocidad arbitraria del móvil en cualquier tiempo}\\
v(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{4t^3+4t^2h^2+8th^3+h^4-9t^2h-9th^2-3h^3+18th+9h^2+26h}{h}\\
v(t) &= \lim_{h\to 0}(4t^3+4t^2h+8th^2+h^3-9t^2-9th-3h^2+18t+26)\\
v(t) &= (4t^3-9t^2+18t+26) \text{ pies/seg}
\end{aligned}$$

3. Hallemos la aceleración promedio del gato montes en $t = 2$seg

$$\begin{aligned}
a(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{v(t)-v(2)}{t-2}\\
a(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{4t^3-9t^2+18t+26-58}{t-2}\\
a(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(4t^2-t+16)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(4t^2-t+16) = 30\text{pies/seg}^2
\end{aligned}$$

La aceleración promedio del gato montes es positiva y variable para cada tiempo.

4. Hallemos la aceleración instantánea del gato montes en t cualquiera.

$$\begin{aligned}
a(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\\
a(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{4(t+h)^3-9(t+h)^2+18(t+h)+26-(4t^3-9t^2+18t+26)}{h}\\
a(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{4(t+h)^3-9(t+h)^2+18(t+h)+26-(4t^3-9t^2+18t+26)}{h}
\end{aligned}$$

utilizando las propiedades algebraicas de binomio de Newton y la diferencia de cubos entre otros del álgebra resulta

$$a(t) = (12t^2-18t+18)\text{pies/seg}^2$$

Representación gráfica de las trayectorias realizadas del gato montes: La posición, velocidad y aceleración en cualquier instante de tiempo.

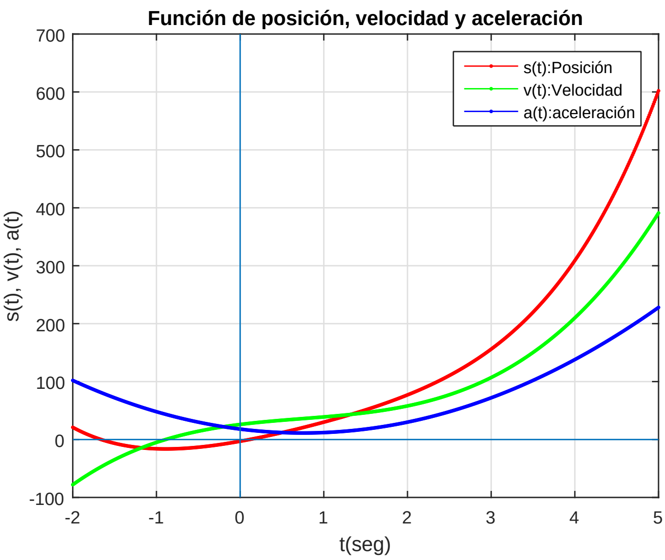


Figura 2.5: Movimiento realizado por el gato Montés

Ejemplo 2.2.5 *Determine la derivada de la función* $y = \cos 4x$ *y calcule la pendiente de la recta tangente en* $f'(\pi/6)$

Solución:

1. Usaremos el concepto de derivada de una función, esto es:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(4x+4h)-\cos(4x)}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(4x)\cos(4h)-\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(4h)-\cos(4x)}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{-\cos(4x)(1-\cos(4h)-\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(4h)}{h}, \text{ usamos la propiedad de limites}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{-\cos(4x)(1-\cos(4h)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(4h)}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{-4\cos(4x)(1-\cos(4h)}{4h} - \lim_{h\to 0}\frac{4\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(4h)}{4h}\\
f'(x) &= -4cos(4x)\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos(4h)}{4h} - 4\operatorname{sen}(4x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4h)}{4h}
\end{aligned}
$$

Además se sabe: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1-\cos(4h)}{4h}=0,\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(4h)}{4h}=1$

$$f'(x)=-4\operatorname{sen}(4x)$$

2. Obtenemos la pendiente de la tangente a la curva de coseno:

$$m_T=f'(\pi/6)=-4\operatorname{sen}(4\pi/6)=2\sqrt{3}$$

3. Representación gráfica:

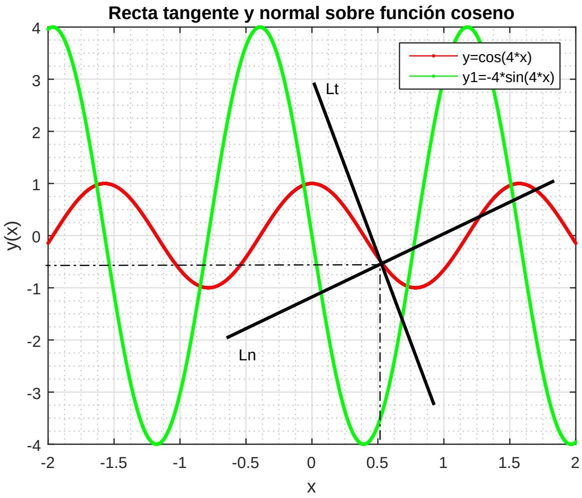


Figura 2.6: gráfica de $f(x)$ y $f'(x)$

Tenemos las rectas tangente y la recta normal a la curva C: en el punto P_0

$$L_T: y+\frac{1}{2}=2\sqrt{3}(x-\pi/6) \quad \text{y} \quad L_N: y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-\pi/6)$$

Ejemplo 2.2.6 *Dada la función de posición de una partícula de un móvil definida por* $f(x)=3x^3-2x^2+4x+5$

1. *Determine la derivada de la función usando la definición básica de la derivada de una función* $f'(1)$.

2. *Encontrar la recta tangente y la recta normal, además gráficar las trayectorias realizadas por la partícula.*

Solución:

1. Utilizamos las propiedades de derivación para funciones reales.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(3(x+h)^3-2(x+h)^2+4(x+h)+5)-(3x^3-2x^2+4x+5)}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{9hx^2+9xh^2+3h^3-4xh-2h^2+4h}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{h(9x^2+9xh+3h^2-4x-2h+4)}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}(9x^2+9xh+3h^2-4x-2h+4) = 9x^2-4x+4
\end{aligned}
$$

2. Hallamos la pendiente de la recta tangente a la curva C, en el punto de paso establecido: $f'(1) = \lim_{x\to 1} 9x^2 - 4x + 4 = 9$

3. Determinamos las rectas tangente y normal en el punto $P_0 = (1, 10)$

$$L_T : y - 10 = 9(x-1) \quad \text{y} \quad L_N : y - 10 = -\frac{1}{9}(x-1)$$

4. Representación gráfica de recta tangente y normal en punto $P_0 = (1, 10)$

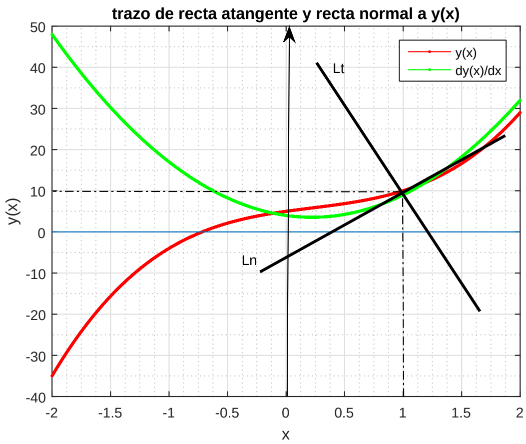


Figura 2.7: Recta tangente y normal a la curva C: $f(x)$

Ejemplo 2.2.7 *Determine la derivada de la función* $y = \sec(3x)$, *además* $y'(\pi/4)$ *y la recta tangente a la curva* C*:*

Solución:

1. Utilizamos el concepto de la derivada de una función y uso de las propiedades:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sec(3x+3h)-\sec(3x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(3x+3h)}{h\cos(3x)\cos(3x+3h)}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(3x)\cos(3h)+\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h)}{h\cos(3x)\cos(3x+3h)}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x)(1-\cos(3h))+\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h)}{h\cos(3x)\cos(3x+3h)}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x)(1-\cos(3h))}{h\cos(3x)\cos(3x+3h)}+\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h)}{h\cos(3x)\cos(3x+3h)}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{3\cos(3x)(1-\cos(3h))}{3h\cos(3x)\cos(3x+3h)}+\lim_{h\to 0}\frac{3\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3h)}{3h\cos(3x)\cos(3x+3h)}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{3\tan(3x)\operatorname{sen}(3h)}{3h\cos(3x+3h)} = 3\tan(3x)\sec(3x)
\end{aligned}$$

2. Hallemos la pendiente de la recta tangente a la curva C: en el punto P_0.

$$f'(\pi/4) = \lim_{x\to\pi/4}(3tan(3x)sec(3x)) = 3\sqrt{2}$$

3. Determinar las rectas tangente y normal de curva C: en $P_0 = (\pi/4, \sqrt{2})$ y representación geométrica.

$$L_T : y-\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(x-\pi/4) \quad \text{y} \quad L_N : y-\sqrt{2} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}(x-\pi/4)$$

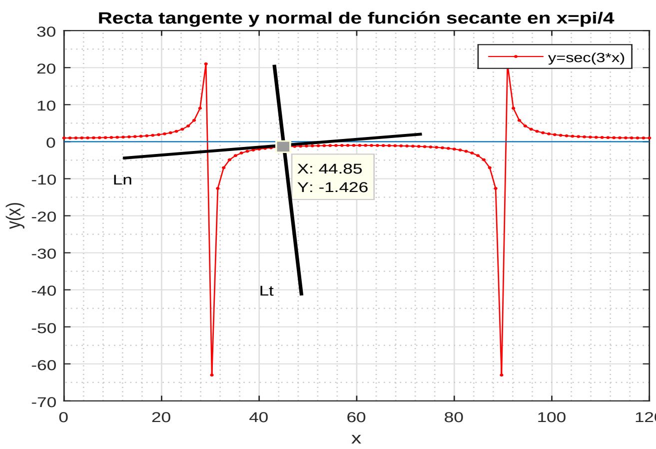


Figura 2.8: Recta tangente y normal a la curva C: $f(x)$

Ejemplo 2.2.8 *Halle la primera derivada de la función*

$$f(x) = x^4 - (1/3)x^3 - (3/2)x^2$$

, además presente la gráfica de las función original y la primera derivada.

1. Uso de la definición:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
Sabemos que $f(x) = x^4 - (1/3)x^3 - (3/2)x^2$ entonces la función $f(x+h)$ resulta:

   $f(x+h) = (x+h)^4 - (1/3)(x+h)^3 - (3/2)(x+h)^2$

   desarrollando por método de binomio de Newton se tiene
   $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$
   $-(1/3)(x+h)^3 = -(1/3)x^3 - x^2h - xh^2 - (1/3)h^3$

   $-(3/2)(x+h)^2 = -(3/2)x^2 - 3xh - (3/2)h^2$

2. Haciendo la operación de suma y resta de polinomios en las variables x y h y tenemos:

$$f(x+h) - f(x) = 4x^3h + 6x^2h^2 + h^4 - x^2h - (1/3)h^3 - 3xh - (3/2)h^2$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + h^4 - x^2h - (1/3)h^3 - 3xh - (3/2)h^2}{h}$$

3. Aplicando el operador límite a cada miembro y resulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + h^4 - x^2h - (1/3)h^3 - 3xh - (3/2)h^2}{h}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}[4x^3 + 6x^2h + h^3 - x^2 - (1/3)h^2 - 3x - (3/2)h] \\ f'(x) &= 4x^3 - x^2 - 3x \end{aligned}$$

   Ésta es la función derivada de $f(x)$ definida en todo punto de la recta real. Además la función original es un polinomio de cuarto grado, mientras la función derivada es un polinomio de tercer grado, entonces $f(x)$ es de clase $\mathbb{C}^1$, esto implica admite derivadas de orden superior.
   Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $f'(x)$.

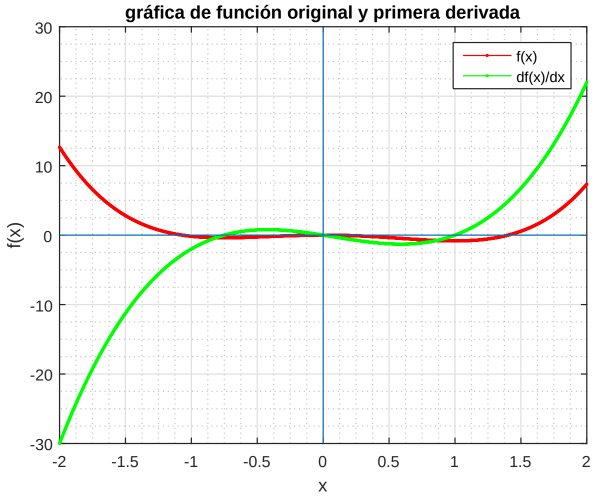


Figura 2.9: Gráfica de la función $f(x)$ y $f'(x)$

Ejemplo 2.2.9 *Halle la primera derivada de la función* $f(x) = \tan(2x)$ *y hacer la representación gráfica.*

Solución:

Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ respectivamente.

Uso de la definición: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

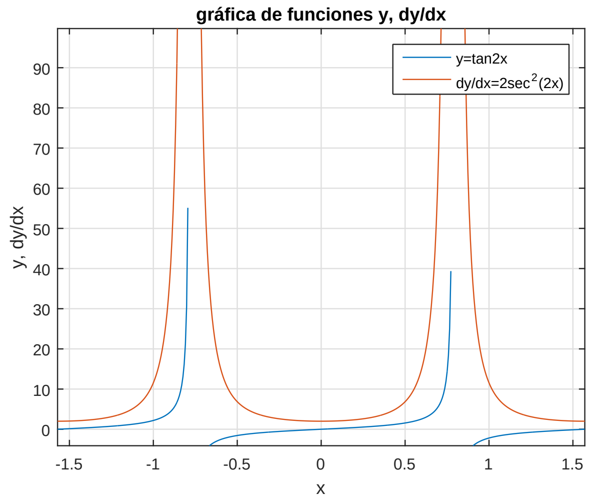


Figura 2.10: Gráfica de la función f(x) y dy/dx

Sabemos que $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ propiedad de funciones trigonométricas.

$$f(x+h) = \tan(2x+2h) = \frac{\tan 2x + \tan 2h}{1 - \tan 2x \cdot \tan 2h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{\tan 2x + \tan 2h}{1 - \tan 2x \cdot \tan 2h} - \tan 2x}{h}$$

Aplicando el operador límite a cada miembro y se tiene:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{\tan 2x + \tan 2h}{1 - \tan 2x \cdot \tan 2h} - \tan 2x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan 2x + \tan 2h}{1 - \tan 2x \cdot \tan 2h} - \tan 2x}{h}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\tan 2x + \tan 2h - \tan 2x + \tan^2(2x)\cdot \tan 2h}{h(1-\tan 2x \cdot \tan 2h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan 2h + \tan^2(2x)\cdot \tan 2h}{h(1-\tan 2x \cdot \tan 2h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan 2h(1 + \tan^2(2x))}{h(1-\tan 2x \cdot \tan 2h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan 2h \cdot \sec^2(2x)}{h(1-\tan 2x \cdot \tan 2h)} = 2\sec^2(2x)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.10 *Halle la primera derivada de la función* $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x+3}$ *y hacer la representación gráfica. Además halle* $f'(1)$ *y* $f'(2)$*.*

Hallamos la primera derivada de la función: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x+3}$

Aplicando reglas de derivación para una función cociente $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ a cada miembro y se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
f'(x) &= \frac{(2x+3)(x^3-2x^2+x+3) - (x^2+3x+2)(3x^2-4x+1)}{(x^3-2x^2+x+3)^2}
\end{aligned}$$

Desarrollando el numerador bajo las propiedades algebraicas y operaciones aritméticas se tiene.

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 14x + 7}{(x^3-2x^2+x+3)^2}$$

Hallamos los valores de las pendientes de las rectas en $x = 1$ e $x = 2$, en efecto:

Si $x = 1$ entonces $f'(1) = \lim_{x\to 1} \dfrac{-x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 14x + 7}{(x^3 - 2x^2 + x + 3)^2} = 1$

Si $x = 2$ entonces $f'(2) = \lim_{x\to 2} \dfrac{-x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 14x + 7}{(x^3 - 2x^2 + x + 3)^2} = -\dfrac{49}{25}$

Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ respectivamente.

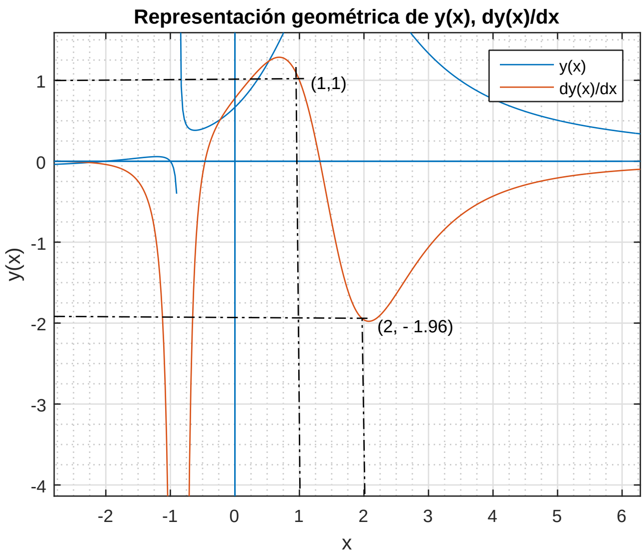


Figura 2.11: Gráfica de funciones $f(x)$ y dy/dx

2.2.4. Ejercicios propuestos

1. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ y $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 3}$. Halle la derivadas de la función respectivamente, además halle las pendientes de las rectas en $x = 1$

2. Dadas las funciones $f(x) = 2x^4 + x^3 + 10x + 3$ y $f(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 + 3x - 12$. Halle la derivadas de la función respectivamente, además halle las pendientes de las rectas en $x = 1$

3. Dadas las funciones $f(x) = ln(2x^2 + 3x + 6)$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 3}$. Halle la derivadas de la función respectivamente, además halle las pendientes de las rectas en $x = 1$

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 2$ paralela a la recta de ecuación $8x - y + 3 = 0$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3 - \frac{x^2}{3}$ perpendicular a la recta $y = x + 2$

6. Halle valores de a y b para que la parabola $y = 2x^2 + ax + b$ sea tangente a la curva $y = 3x - 4$ en el punto $(1, 2)$

7. Determine la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(3, -1)$ y es tangente a la elipse de $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$

8. Determine el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $x^2+y^2-2x = 9$ y $x^2 + y^2 - 4y = 2$

2.3. Reglas de derivación para funciones reales

Sean las funciones reales $f(x)$, $g(x)$ derivables en x y definidos sobre su dominio, [8], [21].

1. Sea $f(x) = cte$ entonces $f'(x) = 0$; la derivada de una función constante es nula

2. Sea $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$; la derivada de una función identidad en uno

3. Sea $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ derivada de una función potencia de base x

4. Sea $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, derivada de suma y resta de funciones definidas en el dominio

5. Sea $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, derivada de producto de funciones definidas en el dominio

6. Sea $(f(x)/g(x))' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, derivada de función cociente con $g(x) \neq 0$

7. Sea $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, derivada de función compuesta definida en su dominio

8. Sea $y = a^u$ entonces $y' = a^u \ln(a)\dfrac{du}{dx}$

9. Sea $y = e^u$ entonces $y' = e^u \dfrac{du}{dx}$, derivada de una función exponencial de base (e)

10. Sea $\log_a u = \dfrac{1}{\ln(a)u} \dfrac{du}{dx}$, derivada de una función logaritmo de base (a)

11. Sea $y = ln(u)$ entonces $y' = \dfrac{1}{u} \dfrac{du}{dx}$, derivada de una función logaritmo natural

Ejemplo 2.3.1 *Hallar $y'(x)$ en $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$, además encontrar las rectas tangentes y normales en $x = -2$*

Solución:

1. Uso de regla de derivación en efecto: $y' = n.x^{n-1}$ resulta: $y' = 3x^2 + 6x - 9$ es la derivada de la función considerada
   $y'(-2) = (3^2 + 6x - 9)|_{-2} = -9$, es la pendiente de la recta tangente a la curva C: en el punto $(-2, 27)$

2. Determinamos las rectas tangente y normal a curva C: en el punto $(-2, 27)$

$$L_T : y - 27 = -9(x + 2) \quad \text{y} \quad L_N : y - 27 = \frac{1}{9}(x + 2)$$

3. Representación gráfica de la función $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ y función primera derivada $y' = 3^2 + 6x - 9$

Ejemplo 2.3.2 *Hallar $y'(x)$ en $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + x + 3}$, además encontrar las rectas tangentes y normales en $x = 1$*

Solución:
Utilizando la propiedad de $(f(x)/g(x))' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

1. $y'(x) = \dfrac{(2x + 3).(x^3 - 2x^2 + x + 3) - (x^2 + 3x + 2).(3x^2 - 4x^+1)}{(x^3 - 2x^2 + x + 3)^2}$
   desarrollando propiedades algebraicas se tiene:
   $y'(x) = \dfrac{-x^4 - 7x^3 + x^2 + 14x + 7}{(x^3 - 2x^2 + x + 3)^2}$ derivada de la función cociente
   $y'(1) = (\dfrac{-x^4 - 7x^3 + x^2 + 14x + 7}{(x^3 - 2x^2 + x + 3)^2})|_1 = \dfrac{14}{9}$
   es la pendiente de la recta tangente a la curva.

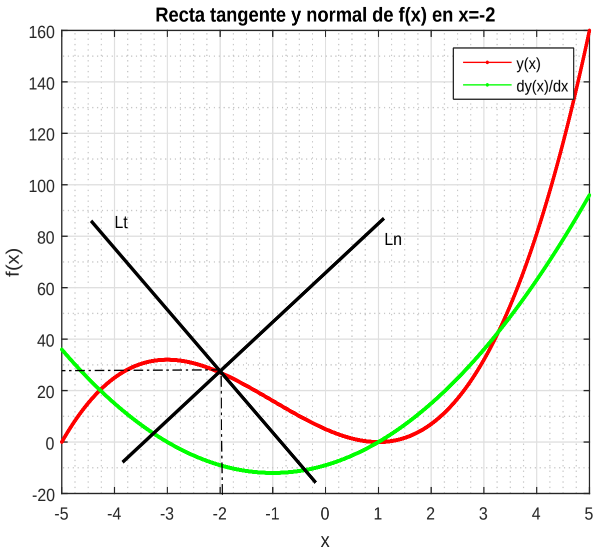


Figura 2.12: Figura de la función $f(x)$ y $f'(x)$

2. Determinamos las rectas tangente y normal a la curva C: en punto $(1,2)$

$$L_T : y - 2 = \frac{14}{9}(x-1) \quad \text{y} \quad L_N : y - 2 = \frac{9}{14}(x-1)$$

3. Representación gráfica de la función $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x+3}$ y además $y' = \dfrac{-x^4-7x^3+x^2+14x+7}{(x^3-2x^2+x+3)^2}$ esto es:

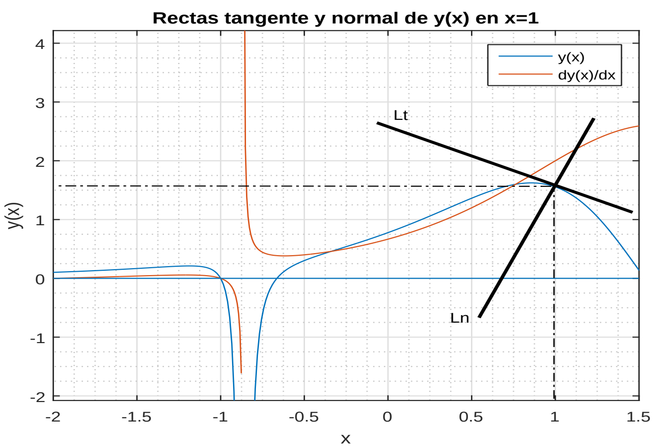


Figura 2.13: Figura de la función $f(x)$ y $f'(x)$

Ejemplo 2.3.3 *Hallar $y'(x)$ en $y = (\frac{x^2+3x+5}{2x-1})^5$ utilizando reglas de derivación de una función real*

Solución:
Uso de la propiedad de logaritmo natural y regla de derivación a cada miembro

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(\frac{x^2+3x+5}{2x-1})^5 \text{ entonces se tiene} \\ \ln(y) &= 5.\ln(x^2+3x+5) - 5\ln(2x-1) \end{aligned}$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 5\frac{2x+3}{x^2+3x+5} - 5\frac{2}{2x-1}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= 5y(x)\frac{2x^2-2x-13}{(2x-1)(x^2+3x+5)} \\ y'(x) &= 5\frac{(x^2+3x+5)^4(2x^2-2x-13)}{(2x-1)^6} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.4 *Hallar $y'(x)$ en la función $y(x) = (\frac{x^2}{x^2-3x-3})^3\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\sqrt[3]{5x^2-2x+3}}$*

Solución:
Aplicando la propiedad de logaritmo natural a cada miembro y se tiene:

$$\begin{aligned} \ln y(x) &= \ln(\frac{x^2}{x^2-3x-3})^3 + \ln\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\sqrt[3]{5x^2-2x+3}} \\ \ln y(x) &= 3\ln(\frac{x^2}{x^2-3x-3}) + \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+2) - \frac{1}{3}\ln(5x^2-2x+3) \\ \ln y(x) &= 3\ln(\frac{x^2}{x^2-3x-3}) + \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+2) - \frac{1}{3}\ln(5x^2-2x+3) \\ \ln y(x) &= l6\ln(x) - 3.\ln(x^2-3x-3) + \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+2) - \frac{1}{3}\ln(5x^2-2x+3) \end{aligned}$$

Aplicando la regla de derivación de logaritmo natural a cada termino.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 6\frac{1}{x} - 3\frac{2x-3}{x^2-3x-3} + \frac{1}{2}\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{1}{3}\frac{10x-2}{5x^2-2x+3}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x)(6\frac{1}{x} - 3\frac{2x-3}{x^2-3x-3} + \frac{1}{2}\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{1}{3}\frac{10x-2}{5x^2-2x+3}) \\ y'(x) &= (\frac{x^2}{x^2-3x-3})^3\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\sqrt[3]{5x^2-2x+3}}(6\frac{1}{x} - 3\frac{2x-3}{x^2-3x-3} + \frac{1}{2}\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{1}{3}\frac{10x-2}{5x^2-2x+3}) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5 *Halle la primera derivada de la función* $y(x) = (3x^2+4x+1)\sqrt{x^2+3x-1}$ *que represente el movimiento de una mosca en un laboratorio de física.*

Solución:

Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ respectivamente en cualquier instante de tiempo x.

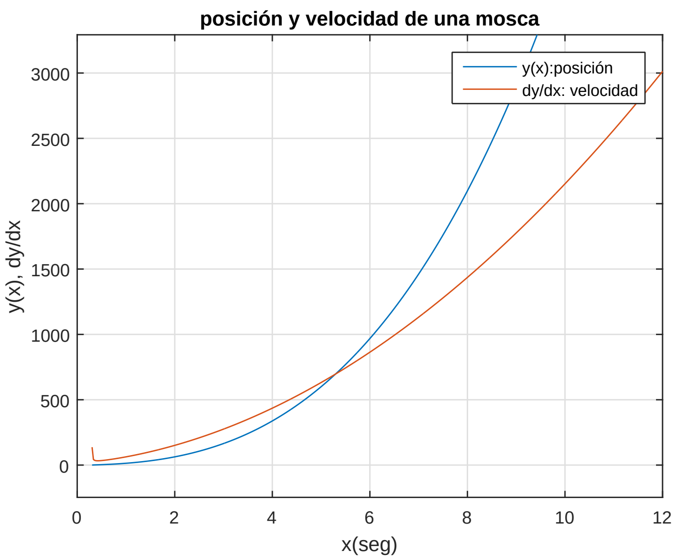


Figura 2.14: Figura de la función $f(x)$ y $f'(x)$

La función de posición $y(x) = (3x^2+4x+1)\sqrt{x^2+3x-1}$ pies, en cualquier instante de tiempo x segundos. Hallamos la velocidad de arbitraria de la mosca, utilizando propiedades de derivación, además debemos usar la propiedad de logaritmo a cada miembro y resulta:
$\ln(y(x)) = \ln(3x^2+4x+1) + \frac{1}{2}.\ln(x^2+3x-2)$ derivado por reglas de derivación.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= \frac{6x+4}{3x^2+4x+1} + \frac{2x+3}{2(x^2+3x-1)} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{(6x+4)(2x^2+6x-2)+(2x+3)(3x^2+4x+1)}{2x^2+6x-2} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{18x^3+61x^2+35x-5}{2x^2+6x-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= y(x)\left(\frac{18x^3+61x^2+35x-5}{2x^2+6x-2}\right)\\
y'(x) &= (3x^2+4x+1)\sqrt{x^2+3x-1}\left(\frac{18x^3+61x^2+35x-5}{2x^2+6x-2}\right)\\
y'(x) &= \frac{18x^3+61x^2+35x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}}
\end{aligned}
$$

esto representa la velocidad de la mosca dentro del laboratorio de física.

Ejemplo 2.3.6 *Halle la primera deriva de la función* $f(x) = \dfrac{10x^2+10x+5}{7x^2+16x+2}$ *que representa la posición de un venado en la comunidad de la Joya ciudad de Puerto Maldonado en cualquier instante de tiempo* x *segundos.*

Solución:

La representación gráfica de las funciones de posición y velocidad del venado en cualquier instante de tiempo x.

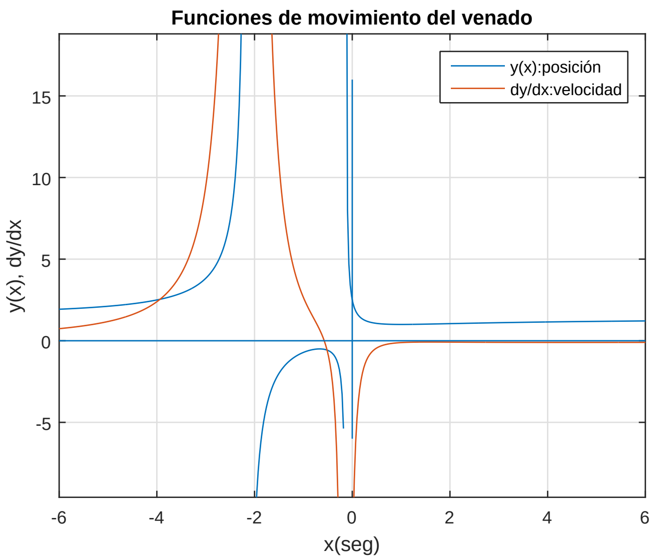


Figura 2.15: Figura de la función f(x) y f'(x)

La función de posición arbitraria del venado es $f(x) = \dfrac{10x^2+10x+5}{7x^2+16x+2}$ pies

Hallemos la velocidad arbitraria del venado para todo $x \in \mathbb{R} - \{-2.15, -0.13\}$ y uso de las reglas de derivación de una función cociente y resulta:

$$f'(x) = \frac{(20x+10)(7x^2+16x+2)-(10x^2+10x+5)(14x+16)}{(7x^2+16x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(70x^3+390x^2+200x+20)-(140x^3+300x^2+230x+80)}{(7x^2+16x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-70x^3+90x^2-30x-60)}{(7x^2+16x+2)^2}$$

esta representa la velocidad del venado en la comunidad de la Joya , puesto que x es el tiempo en segundos.

2.3.1. Ejercicios propuestos

Usando la regla de derivación determine las derivadas de las funciones reales definidas

1. $y = \dfrac{x^3+2x^2-5x+2}{x^2-3x-2}$
2. $y = (\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+3x+3})^4$
3. $y = \ln(\dfrac{x^3-5x^2+5x-2}{x^2+3x-2})$
4. $y = \dfrac{x^4+2x^3-x+3}{x^2+4x+3}$
5. $y = (x^3+5x+3)^3.(x^2+3x-5)^2$
6. $y = \ln(\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+2}}{\sqrt[3]{x^4-3x^2+5}})$
7. $y = e^{\frac{3x^2+2}{x^3+2x^2+2}}$
8. $y = \ln(\dfrac{x^3+3x+2}{x^2-4x-2})^3$
9. $y = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x-2}$
10. $y = \dfrac{4x^3+x^2+8x+2}{x^2}$
11. $y = \dfrac{x^3-8}{x^3+5x^2+10x+12}$
12. $y = (3x^2+4x+1)\sqrt{x^2+3x+2}$
13. $y = \sqrt[3]{x^3+8x^2+5x+2}$
14. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3-5x^2+2x+3}{x^2+3x+2}}$
15. Determinar la derivada de la función definida por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & -3 < x \leq 0 \\ 3x-5 & 0 < x \leq 1 \\ x^3-3x-4x+4 & x > 1 \end{cases}$$

2.4. Continuidad y derivabilidad de una función

En el capítulo anterior, estudiamos los conceptos de continuidad de una función $f(x)$ en un punto y sobre un intervalo cerrado o abierto. A continuación analizar la relación de continuidad y derivabilidad de una función $f(x)$ en un punto x_0, ambas se definen con el operador límite.

Definición 2.4 *Se dice que una función $f(x)$ es derivable en el punto x_0, si existe la derivada en el punto $x_0 \epsilon D_f$; es decir existe:*

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

significa que los límites laterales de la función en primera deriva existen y son iguales, [13], [21].

Definición 2.5 *Se dice la función real $f(x)$ es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$, es derivable en el intervalo abierto $\langle a, b \rangle$, y en sus extremos, es decir, existen las derivadas laterales por la derecha a, como la derivada lateral por la izquierda b. Para mayor comprensión establecemos la definición formal de límite de las primeras derivadas, [7], [8].*

Observación:

1. La derivada lateral por la derecha de función $f(x)$ en x_0 definida en su dominio por: $f'(x^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ si existe
2. La derivada lateral por la izquierda de función $f(x)$ en x_0 definida en su dominio por:
   $f'(x^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ si existe
3. Si $f'(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Teorema 2.4.1 (Funciones derivables continuas) *Una función $f(x)$ es diferenciable en un punto x_0, entonces la función $f(x)$ es continua en $x_0 \epsilon D_f$. (El recíproco no es cierto)*

Demostración:

Por hipótesis la función $f(x)$ es derivable es x_0 entonces existe

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Sea $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}.(x-x_0)\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\
&= f'(x_0).\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\
&= 0 \quad \text{entonces } \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)
\end{aligned}$$

así la función $f(x)$ es continua en x_0

Teorema 2.4.2 *Sea una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable. Si $f'(a)<d<f'(b)$ entonces existe $c\in\langle a,b\rangle$ tal que $f'(c)=d$*

Ejemplo 2.4.1 *Determinar si la función es diferenciable en $x=1$ definida:*

$$f(x)=\begin{cases} x^3+7x & x<1\\ 2x^5+6 & x\geq 1\end{cases}$$

Solución:

1. Veamos que $f(x)$ es derivable en $x=1$, para esto debemos analizar si existen los limites laterales en primera derivada

   a) si $x<1$ entonces $x\to 1^-$

   $$\begin{aligned}
   f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+7x-8}{x-1}\\
   f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+7x-8}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+8)}{x-1}=10
   \end{aligned}$$

   b) si $x\geq 1$ entonces $x\to 1^+$

   $$\begin{aligned}
   f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^5-2}{x-1}\\
   f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{2x^5-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=10
   \end{aligned}$$

   c) De $(1a)$ y $(1b)$ afirmamos las derivadas laterales son iguales, esto es:
   Si $f'(1)=10\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

   Entonces la función $f(x)$ es derivable en $x=1$

2. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$, similar debemos analizar los limites laterales deber ser iguales

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (x^3 + 7x) = 8 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (2x^5 + 6) = 8 \end{aligned}$$

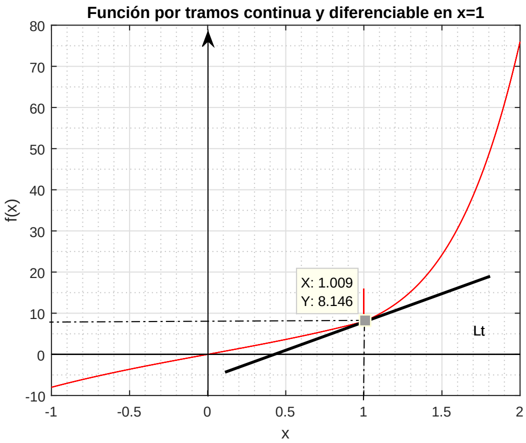


Figura 2.16: Función diferenciable y continua en $x = 1$

3. Interpretación gráfica: Las dos curvas se interceptan en el punto $(1, 8)$, además se observa la trayectoria no presenta saltos bruscos, ni vacíos, ni interrupciones, por consiguiente la curva es continua en $x = 1$ y por supuesto sobre la recta real. Además las dos curvas en el punto de intersección es suave, es decir no son tan pronunciados ni agudos, nos permite afirmar la función es diferenciable en el punto $(1, 8)$, es decir es posible trazar una recta tangente a las curvas en el punto de intersección.

Ejemplo 2.4.2 *Analizar si la función $f(x) = |x^2+3x-4|$ es diferenciable y continua en $x = 4$ y $x = 1$ definida.*

Solución:

1. Por definición de propiedad de valor absoluto tenemos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ -(x^2 + 3x - 4) & -4 < x \leq 1 \end{cases}$$

2. Representación gráfica de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$

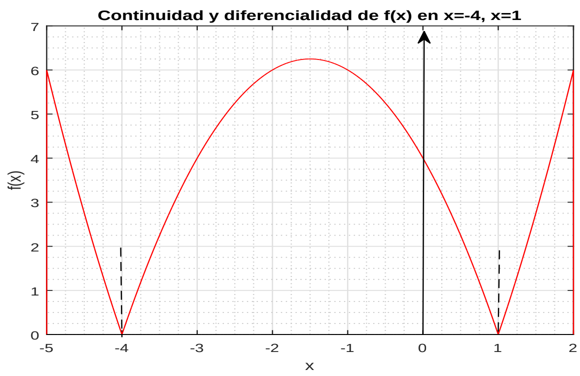


Figura 2.17: Función no diferenciable pero continua en $x = 1$, $x = -4$

3. La derivada de la función de valor absoluto es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ -(2x+3) & -4 < x \leq 1 \end{cases}$$

4. Hallamos si $f(x)$ es diferenciable en $x = -4$, para esto analizamos los limites laterales en primera derivada de la función $f(x)$

$$f'(-4) = \begin{cases} -5 & x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ 5 & -4 < x \leq 1 \end{cases}$$

Esto implica los limites laterales en primera derivada son distintos $f'(-4^-) \neq f'(-4^+)$, luego nos permite afirmar la función $f(x)$ no es diferenciable en $x = -4$, es decir, la curva es tan aguda o pronunciada o punta en este punto. Pero la función $f(x)$ en este punto $x = -4$ en continua.

5. Hallamos si $f(x)$ es diferenciable en $x = 1$, para esto analizamos los limites laterales en primera derivada de la función $f(x)$

$$f'(1) = \begin{cases} 5 & x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ -5 & -4 < x \leq 1 \end{cases}$$

Esto implica los limites laterales en primera derivada son distintos $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, luego nos permite afirmar la función $f(x)$ no es diferenciable en $x = 1$, es decir, la curva es tan aguda o pronunciada o termina en punta. Pero la función $f(x)$ en este punto $x = 1$ en continua.

Ejemplo 2.4.3 *Analizar si la función $f(x)$ definida por tramos, es diferenciable y continua en $x = 1$*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3 & x \leq 1 \\ 3x + 4 & x > 1 \end{cases}$$

Solución:

En la gráfica vemos que existe un salto o vacío de la trayectoria de la función por tramos.

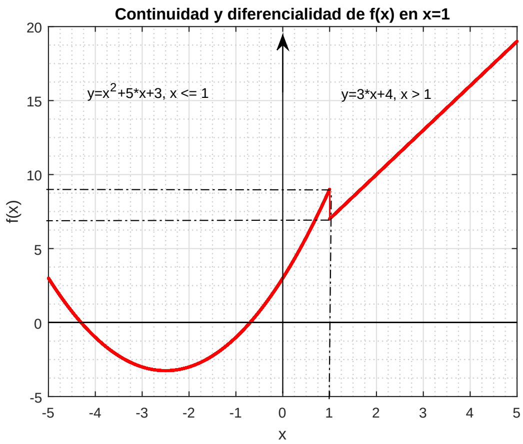


Figura 2.18: Función no diferenciable y no continua en $x = 1$

1. Veamos la diferenciabilidad de la función $f(x)$ en $x = 1$. Veamos si los límites laterales en primera derivada son iguales, esto significa límite lateral por la izquierda y derecha en primera derivada sen iguales o no.

   a) Si $x \to 1^-$ entonces

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} \\ f'(1^-) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+6)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 6) = 7 \end{aligned}$$

   b) si $x \to 1^+$ entonces

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x - 3}{x - 1} \\ f'(1^+) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{3(x-1)}{x - 1} = 3 \end{aligned}$$

c) De (1*a*) y (1*b*) decimos que los limites laterales en primera derivada no son iguales, esto significa que

$$f'(1) \quad \text{no existe } \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

finalmente la función $f(x)$ no es diferenciable en $x=1$

2. Veamos si la función $f(x)$ es continua en $x=1$, para ello debemos analizar los limites laterales son iguales o no

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(x^2+5x+3)=9\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(3x+4)=7\end{aligned}$$

Esto implica que la función real definida $f(x)$ no es continua en $x=1$, también sus límites laterales en $x=1$ son distintos.

Ejemplo 2.4.4 *Analizar la continuidad y diferenciabilidad de la función $f(x)$ definida por tramos en $x=1$*

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & x\le 1\\ 2x^2-5x+4 & x>1\end{cases}$$

Solución:

1. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(-x^2+x+1)=1\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(2x^2-5x+4)=1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

Los límites laterales de la función $f(x)$ son iguales y existe $f(1)=1$- Por tanto la función $f(x)$ por tramos es continua en $x=1$

2. Veamos la diferenciabilidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y esto es:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+1 & x\le 1\\ 4x-5 & x>1\end{cases}$$

Si $f'(1^-) = (-2x+1)|_1 = -1$ límite lateral por la izquierda en primera derivada

Si $f'(1^+) = (4x-5)|_1 = -1$ límite lateral por la derecha en primera derivada

Los límites laterales en primera derivada son iguales, existe $f'(1) = -1$, entonces la función definida por tramos es diferenciable en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1$$

3. Representación gráfica de la función por tramos

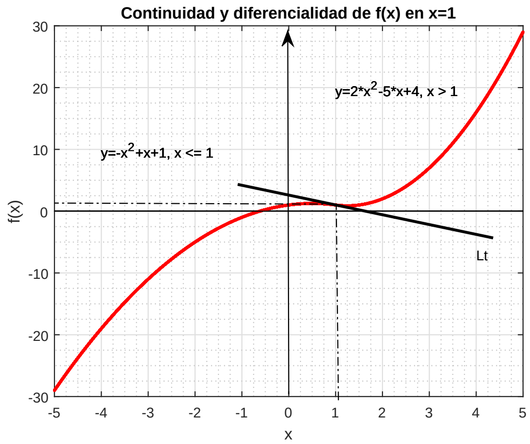


Figura 2.19: Función diferenciable y continua en $x = 1$

Ejemplo 2.4.5 *Halle la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 1$, definida por tramos.*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x & x \leq 1 \\ x^2 - 5x + 8 & x > 1 \end{cases}$$

Solución:

1. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (x^3 + 2x^2 + x) = 4 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 5x + 8) = 4 \end{aligned}$$

Los limites laterales de la función $f(x)$ son iguales y existe $f(1) = 1$. Por tanto la función $f(x)$ por tramos es continua en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$$

2. Veamos la diferenciabilidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y esto es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 & x \leq 1 \\ 2x - 5 & x > 1 \end{cases}$$

   Veamos la función por tramos es derivable en $x \to 1^-$, esto es:
   Si $f'(1^-) = (3x^2 + 4x + 1)|_1 = 8$ límite lateral por la izquierda en primera derivada
   Veamos la función por tramos es derivable en $x \to 1^+$, esto es:
   Si $f'(1^+) = (2x - 5)|_1 = -3$ límite lateral por la derecha en primera derivada
   Los límites laterales en primera derivada no son iguales en $x = 1$, esto implica que no existe $f'(1)$, entonces la función $f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pero, $f(x)$ es función continua en $x = 1$.

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ entonces no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función por tramos no es derivable en $x = 1$, se ve claramente la curva $f'(1)$ termina en una curva tan aguda y no se puede trazar ninguna recta tangente en este punto.

3. Representación gráfica de la función por tramos.

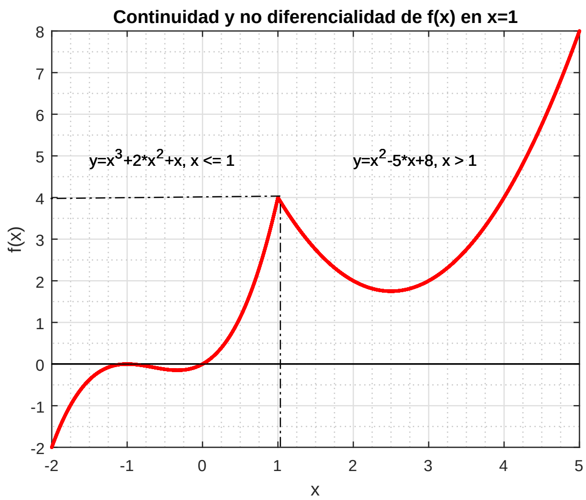


Figura 2.20: Función no diferenciable, pero continua en $x = 1$

Ejemplo 2.4.6 *Halle la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$ definida por* *tramos, en los puntos establecidos.*

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} x & x < \pi/2 \\ \operatorname{sen} x - 3\cos x & \pi/2 \leq x < \pi \\ -3\cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

Solución:

1. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ en $x = \pi/2$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (2\operatorname{sen} x) = 2 \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{sen} x - 3\cos x) = 1 \end{aligned}$$

   Los limites laterales de la función $f(x)$ no son iguales esto es: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ no existe. Por tanto la función $f(x)$ por tramos no es continua en $x = \pi/2$

2. Veamos la continuidad de la función $f(x)$ en $x = \pi$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi^-} f(x) &= \lim_{x\to\pi^-} (\operatorname{sen} x - 3\cos x) = 3 \\ \lim_{x\to\pi^+} f(x) &= \lim_{x\to\pi^+} (-3\cos x) = 3 \end{aligned}$$

   Los limites laterales de la función $f(x)$ son iguales esto es: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ existe. Por tanto la función $f(x)$ por tramos es continua en $x = \pi$

3. Veamos la derivabilidad de la función por tramos $f(x)$ en $x = \pi/2$ y π esto es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cos x & x < \pi/2 \\ \cos x + 3\operatorname{sen} x & \pi/2 \leq x < \pi \\ 3\operatorname{sen} x & x \geq \pi \end{cases}$$

4. Veamos la función $f(x)$ por tramos es derivable en $x \to \frac{\pi}{2}^-$, esto es:

   Si $f'(\frac{\pi}{2}^-) = (2\cos x)|_{\frac{\pi}{2}} = 0$ límite lateral por la izquierda en primera derivada

Veamos la función por tramos es derivable en $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$, esto es:
Si $f'(\dfrac{\pi^+}{2}) = (\cos x + 3\operatorname{sen} x)|_{\frac{\pi}{2}} = 3$ límite lateral por la derecha en primera derivada
Los límites laterales en primera derivada no son iguales en $x = \dfrac{\pi}{2}$, esto implica que, la función $f(x)$ no es derivable $x \to \dfrac{\pi}{2}$, como se observa.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ entonces no existe $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$. Por lo tanto la función por tramos no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2}$, se ve claramente la curva $f'(1)$ termina en un vacío y no se puede trazar ninguna recta tangente en este punto.

5. Veamos la función por tramos $f(x)$ es derivable en $x \to \pi^-$, esto es:
Si $f'(\pi^-) = (\cos x + 3\operatorname{sen} x)|_\pi = -1$ límite lateral por la izquierda en primera derivada,la función por tramos es derivable en $x \to \pi^+$, esto es:
Si $f'(\pi^+) = (3\operatorname{sen} x)|_\pi = 0$ límite lateral por la derecha en primera derivada
Los límites laterales en primera derivada no son iguales en $x = \pi$, esto implica que, que la función $f(x)$ no es derivable en $x = \pi$, como se observa.

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)$ entonces no existe $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$. Por lo tanto la función por tramos no es derivable en $x = \pi$, se ve claramente la curva $f'(\pi)$, pero, es continua por tramos y podemos trazar alguna recta tangente en este punto.
Representación gráfica de la función por tramos y esto es:

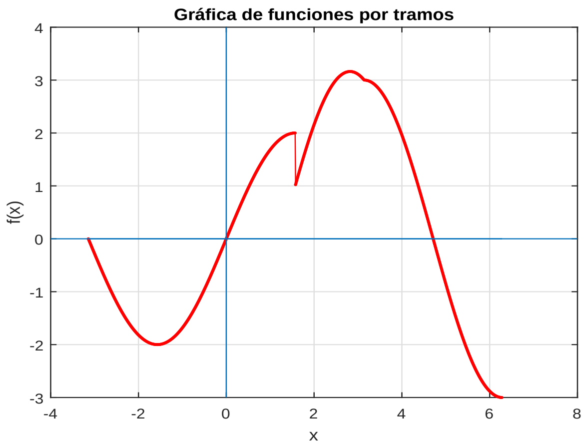


Figura 2.21: Función no diferenciable, pero continua en $x = 1$

2.4.1. Ejercicios propuestos

1. Halle los valores de a y b de la función $f(x)$ y sea derivable en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & x \leq 2 \\ ax + b & x > 2 \end{cases}$$

2. Halle los valores de a, b y c para la función definida por tramos, diferenciable en $x = 1$, y continua en $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} a - b(x+2)^2 & x \leq -1 \\ x - c & -1 < x \leq 1 \\ -a + b(x-2)^2 & x > 1 \end{cases}$$

3. Halle los valores de a, b y c para la función definida por tramos, diferenciable en $x = 3$, y continua en $x = -2$

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x \leq -2 \\ bx^2 + cx + 5 & -2 < x \leq 3 \\ ax^2 + bx + 5 & x > 3 \end{cases}$$

4. Halle los valores de a, b para la función definida por tramos sea diferenciable en $x = -\dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 4x^2 & x \leq -\frac{1}{2} \\ bx - 3 & x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

5. Halle los valores de a, b para la función definida por tramos sea diferenciable en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & x \leq 2 \\ ax + 3 & x > 2 \end{cases}$$

6. Halle los valores de a, b para la función definida por tramos sea diferenciable en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 2x + 3 & x \leq 2 \\ 4ax + b & x > 2 \end{cases}$$

7. Halle los valores de a, b y c para la función definida por tramos, diferenciable en $x = -1$, y continua en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq -1 \\ 2x + 1 & -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 & x > 1 \end{cases}$$

8. Estudie la continuidad y diferenciabilidad de la función definida por tramos en su dominio de definición

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x + 3 & x \leq -2 \\ 2x^2 + x + 1 & -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

9. Estudie la continuidad y diferenciabilidad de la función definida por tramos en su dominio de definición

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & x \leq 1 \\ 2x^3 + x + 3 & 1 < x \leq 3 \\ x^2 + 4 & x > 3 \end{cases}$$

10. Halle los valores a y b si la función definida en su dominio es derivable en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + 4 & x \leq 2 \\ ax + 3b & x > 2 \end{cases}$$

2.5. Derivadas de orden superior

En ciertos problemas del contexto real para modelar se requiere funciones de orden superior, los fundamentos teóricos de matemática superior y estadísticas las derivadas de orden superior son muy importantes. Las derivadas de segundo orden son útiles para encontrar puntos críticos, concavidad y puntos de inflexión y facilita para hacer las gráficas de las curvas, las derivadas de tercer orden y cuarto grado para encontrar límites de funciones por regla de hospital. En física es importante para describir la aceleración de los cuerpos en movimiento, en economía para expresar el aumento y disminución de los costos marginales.

Definición 2.6 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en su dominio de definición y existe la derivada de la función $f(x)$, esto es:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}; \text{ primera derivada de } f(x) \text{ existe} \\ f''(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{d^2y}{dx^2}; \text{ segunda derivada de } f(x) \text{ existe} \\ f'''(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \frac{d^3y}{dx^3}; \text{ tercera derivada de } f(x) \text{ existe} \end{aligned}$$

y así sucesivamente se tiene la derivada de la función $f(x)$ de orden n-ésimo es:

$$f^n(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f^{n-1}(x+h) - f^{n-1}(x)}{h} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad n - \text{ésima derivada de} f(x)$$

existe, [4], [13], [21]

Las derivadas de orden superior de una función es también otra función y podemos analizar el comportamiento en cada una de las sucesivas derivaciones definidas en su dominio contenido en los reales. En caso que exista la n-ésima derivada de la función $f^n(x)$, entonces la función $f(x)$ es de clase $C^n(R)$, es mas existen funciones polinomiales, exponenciales o trigonométricas que admiten derivadas infinitas, a esta función $f(x)$ es de clase C^∞. Estas aplicaciones para determinar límites por la regla de Hospital , [8], [4].

Ejemplo 2.5.1 *Halle $y'(x)$, $y''(x)$ de la función definida $y(x) = 2x^3 - 26x + 10$ en el intervalo cerrada [-2; 4], además determine la gráfica de las funciones derivadas y original.*

Solución:

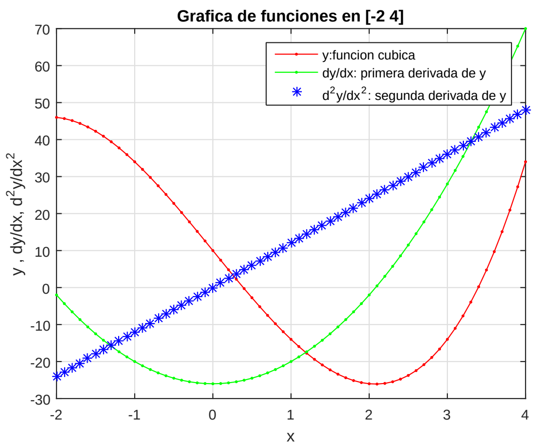


Figura 2.22: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

1. Para determinar la primera derivada de $y(x)$, usamos las reglas de derivación

$$y'(x) = 6x^2 - 26$$

2. Para determinar la segunda derivada de $y(x)$, usamos las reglas de derivación

$$y''(x) = 12x$$

3. Representación gráfica de $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ y esto es, Figura $2 \cdot .22$.

Ejemplo 2.5.2 *Determine las derivadas de orden superior de la función*

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

en su dominio definición y hacer la representación gráfica.

Solución:

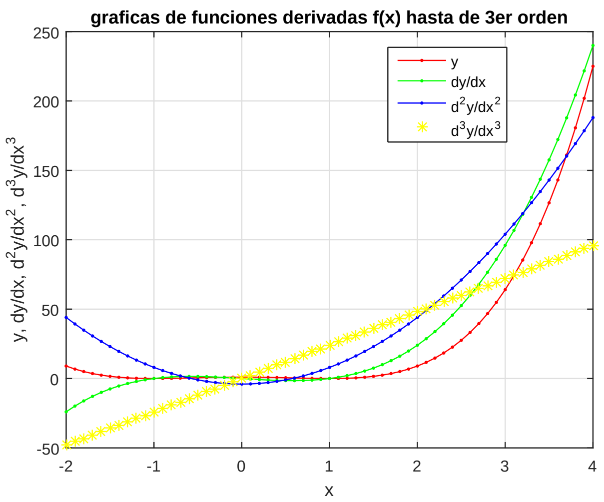


Figura 2.23: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

1. Para determinar la primera derivada de $f(x)$, usamos las reglas de derivación
   $f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{dy}{dx}$ primera derivada de $f(x)$ existe
   Esto es: $y = x^n$ entonces $y' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

2. Para determinar la segunda derivada de $f(x)$, usamos las reglas de derivación
   Esto es: $y = x^n$ entonces $y'' = n(n-1)x^{n-2}$ entonces $f''(x) = 12x^2 - 4$

3. Para determinar la tercera derivada de $f(x)$, usamos las reglas de derivación Esto es: $y = x^n$ entonces $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ entonces $f'''(x) = 24x$

4. Representación gráfica de $y(x), y'(x), y''(x)$ y esto es, Figura $2 \cdot 23$.

Ejemplo 2.5.3 *Determine todas las derivadas de todo los ordenes de la función definida $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ en todo su domino y su representación gráfica de las funciones derivadas.*

Solución:

1. Uso de las reglas de derivación

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 4x^3 - 10x, \text{ la primera derivada de la función } f(x) \\
y''(x) &= 12x^2 - 10, \text{ la segunda derivada de la función } f(x) \\
y'''(x) &= 24x, \text{ la tercera derivada de la función } f(x) \\
y^{iv}(x) &= 24, \text{ la cuarta derivada de la función } f(x) \\
y^{v}(x) &= 0, \text{ la quinta derivada de la función } f(x)
\end{aligned}$$

2. La representación gráfica de las funciones derivadas $f(x)$

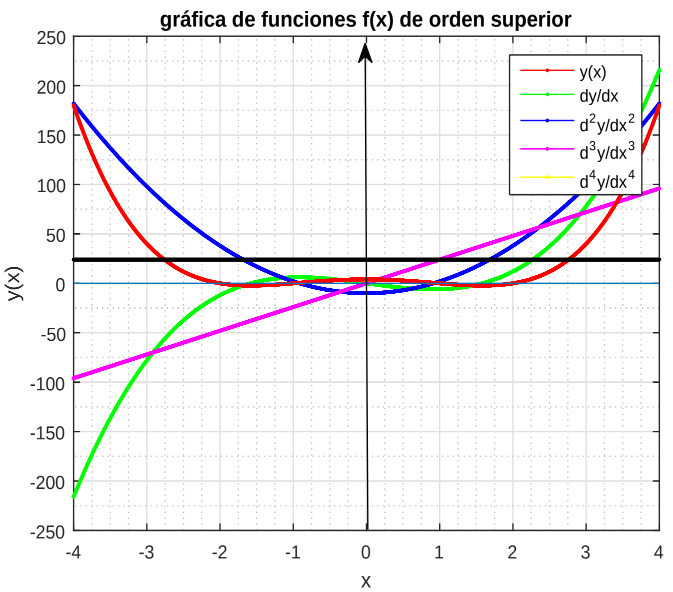


Figura 2.24: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

Ejemplo 2.5.4 *Determine la n-ésima derivada de la función* $f(x) = \dfrac{6}{x-3}$

Solución: Uso de las reglas de derivación

$$\begin{aligned}
y' &= 6(-1)(x-3)^{-2} \\
y'' &= 6(-1)(-2)(x-3)^{-3} \\
y''' &= 6(-1)(-2)(-3)(x-3)^{-4} \\
y^{iv} &= 6(-1)(-2)(-3)(-4)(x-3)^{-5} \\
&\vdots \\
y^{n} &= 6(-1)^n(1)(2)(3)(4)(5)\cdots(x-3)^{-(n+1)} = 6(-1)^n(n!)(x-3)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.5 *Encontrar la n-ésima derivada* $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-7x+6}$

Solución:

1. Uso de las propiedades de fracciones parciales
$$\frac{x^2+x+1}{x^3-7x+6} = \frac{x^2+x+1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}$$
$$f(x) = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$
por consiguiente los valores de $A = \dfrac{7}{5}$, $B = -\dfrac{3}{4}$ y $C = \dfrac{7}{20}$

2. Reemplazando los valores de A, B y C, se tiene:
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+x+1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \frac{7}{5(x-2)} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{7}{20(x+3)} \\
f(x) &= \frac{7}{5(x-2)} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{7}{20(x+3)}
\end{aligned}$$

3. Realizamos derivación hasta orden n-ésimo de $f(x)$
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{7}{5}(-1)(x-2)^{-2} - \frac{3}{4}(-1)(x-1)^{-2} + \frac{7}{20}(-1)(x-3)^{-2} \\
f''(x) &= \frac{7}{5}(-1)(-2)(x-2)^{-3} - \frac{3}{4}(-1)(-2)(x-1)^{-3} + \frac{7}{20}(-1)(-2)(x-3)^{-3} \\
f'''(x) &= \frac{7}{5}(-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4} - \frac{3}{4}(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} + \frac{7}{20}(-1)(-2)(-3)(x-3)^{-4} \\
&\vdots \\
f^{n}(x) &= \frac{7}{5}(-1)^n(n!)(x-2)^{-(n+1)} - \frac{3}{4}(-1)^n(n!)(x-1)^{-(n+1)} + \frac{7}{20}(-1)^n(n!)(x-3)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.6 *Determine la n-ésima de derivada de la función* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x = -\cos(2x+\pi/2)\\
f''(x) &= 2\operatorname{sen}(2x+\pi/2) = -2\cos(2x+\pi)\\
f'''(x) &= 2^2\operatorname{sen}(2x+\pi) = -2^2\cos(2x+3\pi/2)\\
f^{iv}(x) &= 2^3\operatorname{sen}(2x+3\pi/2) = -2^3\cos(2x+2\pi)\\
&\vdots\\
f^{iv}(x) &= -2^{n-1}\cos(2x+n\pi/2)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.7 *Determine la n-ésima derivada de* $f(x) = \operatorname{sen} x = -\cos(x+\pi/2)$

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \operatorname{sen}(x+\pi/2)\\
f''(x) &= \cos(x+\pi/2) = \operatorname{sen}(x+\pi)\\
f'''(x) &= \cos(x+\pi) = \operatorname{sen}(x+3\pi/2)\\
&\vdots\\
f^{n}(x) &= \operatorname{sen}(x+n\pi/2)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.8 *Halle todas las derivadas de todo los órdenes de la función definida sobre la recta real,* $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 29x^2 + 8x + 12$ *y representación gráfica.*

Solución:
Usar reglas de derivación de función potencia base x y exponente $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 58x + 8 \text{ llamada primera derivada de } f(x)\\
f''(x) &= 20x^3 + 36x^2 - 30x + 58 \text{ llamada segunda derivada de } f(x)\\
f'''(x) &= 60x^2 + 72x - 30 \text{ llamada tercera derivada de } f(x)\\
f^{iv}(x) &= 120x + 72 \text{ llamada cuarta derivada de } f(x)\\
f^{v}(x) &= 120 \text{ llamada quinta derivada } f(x)\\
f^{vi}(x) &= 0 \text{ denominada sexta derivada de } f(x)
\end{aligned}$$

Representación gráfica de las funciones derivadas hasta sexto orden y esto es:

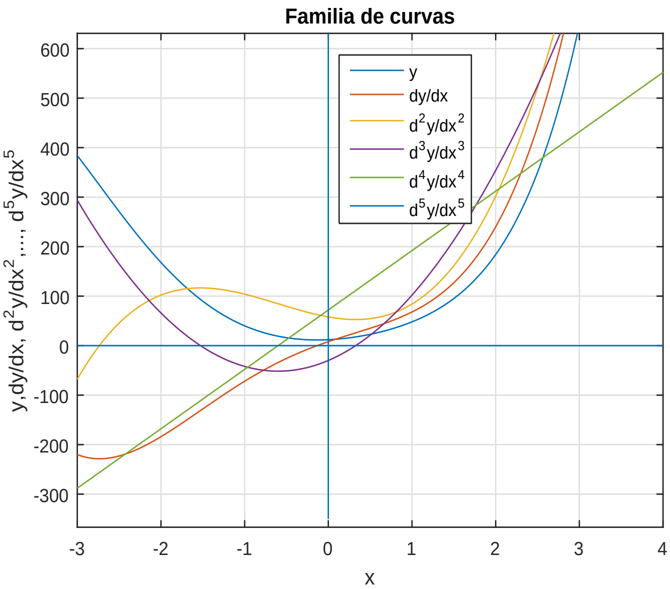


Figura 2.25: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

2.5.1. Ejercicios propuestos

1. Encuentre la formula para la n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2-x-2}$

2. Encuentre todas las derivadas de la función $f(x) = x^5+3x^4+2x^3-3x^2+2x+5$, además halle la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$ y hacer el gráfico respectivo

3. Encuentre la formula de n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+5x+1}{x^3-x^2-4x+4}$

4. Encuentre la formula de n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4x+3}$

5. Encuentre la formula de n-ésima derivada de la función $f(x) = \cos(x)$

6. Encuentre la formula de n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{2x^2-19x+45}{x^2-9x+20}$

7. Dada la función de posición de un móvil $s(t) = -\dfrac{27t^2}{10} + 27t + 10$ pies y t segundos. Determine la velocidad y aceleración del móvil, además calcule la maxima posición alcanzada por el móvil.

2.6. Derivada función exponencial y logarítmica

Cuando una función está expresada como cocientes, productos y potencias, de funciones entonces antes de usar las propiedades de derivación, previamente debemos aplicar logaritmos y sus propiedades.

$$\begin{aligned}
\ln(A \cdot B) &= \ln(A) + \ln(B) \\
\ln(A/B) &= \ln(A) - \ln(B) \\
\log_A B &= \frac{\ln(B)}{\ln(A)} \\
\ln(A^n) &= n\ln(A)
\end{aligned}$$

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

Definición 2.7 *Sea una función $u = g(x)$ y otra función exponencial de base a esto es, $y(x) = a^u$, cuya primera derivada es $du = g'(x)dx$ entonces la derivada de la función exponencial es $y'(x) = a^u \cdot \ln(a) \cdot \frac{du}{dx}$*
Sea la función logarítmica $f(x) = \log_a u(x)$ entonces su derivada es $f'(x) = \frac{du}{u \cdot \ln(a)dx}$
Sea la función $y = e^u$ entonces la derivada es $y'(x) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplo 2.6.1 *Determine $y'(x)$ de la función definida $y(x) = (\frac{1+e^{2x}}{1-e^{-2x}})^3$*

Solución:

1. Uso de propiedad de logaritmo de una función real
   $y(x) = (\frac{1+e^{2x}}{1-e^{-2x}})^3$ entonces $\ln y(x) = 3\ln(1+e^{2x}) - 3\ln(1-e^{-2x})$
2. Uso de las regla de derivación y resulta:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 3.\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - 3.\frac{-2e^{2x}}{1-e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 6y(x)\frac{1-e^{-2x}-1-e^{2x}}{(1+e^{2x})(1-e^{-2x})} \\
&= -6(\frac{1+e^{2x}}{1-e^{-2x}})^3\frac{e^{-2x}+e^{2x}}{(1+e^{2x})(1-e^{-2x})} \\
&= -6(\frac{1+e^{2x}}{1-e^{-2x}})^3\frac{1+e^{4x}}{e^{4x}-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.2 *Determine* $y'(x)$ *en* $y(x) = \log_8(5x^2 + 6x + 2)$

Solución:

1. Uso de la propiedad de logaritmo de base 8, esto es: $y(x) = \dfrac{\ln(5x^2 + 6x + 2)}{\ln 8}$

2. Uso de reglas de derivación: $y'(x) = \dfrac{10x + 6}{\ln 8(5x^2 + 6x + 2)}$

Ejemplo 2.6.3 *Calcule* $y'(x)$ *en* $y(x) = \dfrac{3}{16}.\ln(\dfrac{x+1}{x-1}) + \dfrac{3}{8}.\dfrac{3x^2 - 5}{(x^2 - 1)^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{3}{16}(\frac{x-1}{x+1})\frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{8}\frac{6x(x^2-1)^2 - (3x^2-5)(x^2-1)(4x)}{(x^2-1)^4} \\
&= -\frac{3}{8}(\frac{1}{x^2-1}) + \frac{3}{8}\frac{6x(x^2-1) - (3x^2-5)(4x)}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{3}{8}\frac{-(x^2-1)^2 + 18x(x^2-1) - (9x^2-15)(4x)}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{3}{8}\frac{-x^4 + 18x^3 - 2x^2 + 60x - 1}{(x^2-1)^3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.4 *Calcule* $y'(x)$ *en* $y(x) = \dfrac{1}{8}\ln(2x+3) + \dfrac{16x + 17}{16(2x+3)^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{1}{8}\frac{2}{2x+3} + \frac{16(2x+3)^2 - 4(2x+3)(16x+17)}{16(2x+3)^4} \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{2x+3} + \frac{4(2x+3) - (16x+17)}{4(2x+3)^3} \\
&= \frac{(2x+3)^2 + 4(2x+3) - (16x+17)}{4(2x+3)^3} \\
&= \frac{4x^2 + 4x + 4}{4(2x+3)^3} = \frac{x^2 + x + 1}{(2x+3)^3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.5 *Calcule* $y'(x)$ *en* $y(x) = \dfrac{3}{8}.\ln\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{2x^2 - 3}{(x^2 - 4)^2}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{3}{8}\frac{x-2}{x+2}\frac{-4}{(x-2)^2} + \frac{3}{8}\frac{4x(2x^2-4)^2-4x(x^2-4)(2x^2-3)}{(x^2-4)^4}\\
y'(x) &= \frac{3}{8}\frac{-4}{(x^2-4)} + \frac{3}{8}\frac{4x(2x^2-4)-4x(2x^2-3)}{(x^2-4)^3}\\
y'(x) &= \frac{3}{8}\frac{-4}{(x^2-4)} + \frac{3}{8}\frac{4x^3-16x-8x^3+12x}{(x^2-4)^3}\\
y'(x) &= \frac{3}{2}\frac{1}{(x^2-4)} + \frac{3}{2}\frac{-x^3-x}{(x^2-4)^3}\\
y'(x) &= \frac{3}{2}\frac{x^4-x^3+6x^2-x+16}{(x^2-4)^3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.6.6 *Halle y' en* $y = \dfrac{x^3(x+2)^{3/2}}{(3x-6)^3(5x-3)^{1/5}}$

Solución:

Usando la propiedad de logaritmos se tiene:
$\ln y = 3\ln(x) + \dfrac{3}{2}\ln(x+2) - 3\ln(3x-6) + \dfrac{1}{5}\ln(5x-3)$
Aplicando reglas de derivación a cada miembro

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= 3\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - 3\frac{3}{3x-6} + \frac{1}{5}\frac{5}{5x-3}\\
y' &= y\cdot\left(3\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - 3\frac{3}{3x-6} + \frac{1}{5}\frac{5}{5x-3}\right)\\
y' &= y\cdot\left(3\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{5x-3}\right)\\
y' &= y\cdot\left(\frac{6(x^2-4)(5x+3)+3x(x-2)(5x-3)-6x(x+2)(5x-3)+2x(x^2-4)}{2x(x^2-4)(5x-3)}\right)\\
y' &= \left(\frac{x^3(x+2)^{3/2}}{(3x-6)^3(5x-3)^{1/5}}\right)\left(\frac{29x^3+39x^2-96x+68}{2x(x^2-4)(5x-3)}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.6.7 *Determine la primera y segunda derivada de la función*

$$f(x) = 3^x - 3^{-x} + 4^{3x} - 2(3-5^{-x})^4$$

Solución:

Utilizando las propiedades de derivación de funciones logarítmicas y propiedades de

funciones exponenciales de bases constantes establecidas en esta sección, esto es, la primera derivada:
$f'(x) = 3^x \ln(3) + 3^{-x} \ln(3) + 3 * 4^{3x} \ln(4) + 8(3 - 5^{-x})^3(5^{-x}) \ln(5)$
La segunda derivada queda:
$f''(x) = [3^x - 3^{-x}](\ln(3))^2 + 9 * 4^{3x}(\ln(4))^2 - 8(3 - 5^{-x})^2 * (-5^{-x}) * \ln(5)[3 * 5^-x * \ln(5) - (3 - 5^-x). \ln(5)]$

Ejemplo 2.6.8 *Halle la primera derivada de la función real definida mediante.*

$$f(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{2} + \frac{\sqrt{x^2+1}(2x^2+3x+2)}{6}$$

Solución:
Utilizamos las reglas de derivación establecidas en las secciones anteriores

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}.\frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} + \frac{x(2x^2+3x+2)}{6\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}(4x+3)}{6} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} + \frac{x(2x^2+3x+2)}{6\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}(4x+3)}{6} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{x(2x^2+3x+2)}{6\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}(4x+3)}{6} \\
&= \frac{2x^3+3x^2+5x}{6\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}(4x+3)}{6} \\
&= \frac{2x^3+3x^2+5x+(4x+3)(x^2+1)}{6\sqrt{x^2+1}} = \frac{6x^3-6x^2+9x+3}{6\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{6x^3-6x^2+9x+3}{6\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

2.7. Derivada funciones trigonométricas directas

Las funciones trigonométricas definidas como $u = F.T(x) = u(x)$ sean derivables es su dominio respectivo y verifican las siguientes propiedades:

1. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \cdot \dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \cdot \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\sec u = \tan\cdot\sec u\cdot\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\csc u = -\cot u\cdot\csc u\cdot\dfrac{du}{dx}$

Ejemplo 2.7.1 *Halle la segunda derivada de la función*

$$y = \frac{1}{24}\cos^8(3x) - \frac{1}{18}\cos^6(3x) - \frac{1}{12}\operatorname{sen}^4(3x)$$

Solución:

Uso de reglas de derivación de funciones trigonométricas directas

1. Hallamos la primera derivada $y'(x)$, en efecto:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{-24}{24}\cos^7 3x\operatorname{sen}3x + \frac{18}{18}\cos^5 3x\operatorname{sen}3x - \frac{12}{12}\operatorname{sen}^3 3x\cos 3x\\
&= -\cos^7 3x\operatorname{sen}3x + \cos^5 3x\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}^3 3x\cos 3x\\
&= \cos^5 3x\operatorname{sen}3x(-\cos^2 3x + 1) - \operatorname{sen}^3 3x\cos 3x\\
&= \cos^5 3x\operatorname{sen}^3 3x - \operatorname{sen}^3 3x\cos 3x\\
&= \cos 3x\operatorname{sen}^3 3x(\cos^4 3x - 1)\\
&= \cos 3x\operatorname{sen}^5 3x(\cos^2 3x + 1)
\end{aligned}$$

2. Hallamos la segunda derivada de la función $y(x)$, en efecto:

$$\begin{aligned}
y' &= \cos^3 3x\operatorname{sen}^5 3x + \operatorname{sen}^5 3x\cos 3x\\
y'' &= -6\cos^2 3x\operatorname{sen}^6 3x + 15\cos^4 3x\operatorname{sen}^4 3x + 15\operatorname{sen}^4 3x\cos^2 3x - 3\operatorname{sen}^6 3x\\
y'' &= \operatorname{sen}^4 3x\left(-6\cos^2 3x\operatorname{sen}^2 3x + 15\cos^4 3x + 15\cos^2 3x - 3\operatorname{sen}^2 3x\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.7.2 *Halle la segunda derivada de la función definida como:*

$$y = \frac{3}{8}\ln\left(\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) - \operatorname{sen}x\left(\frac{3}{8\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x}\right)$$

Solución:

$$y = \frac{3}{8}\left(\ln(1-\operatorname{sen}x) - \ln(\cos x)\right) - \frac{3\operatorname{sen}x}{8\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen}x}{4\cos^2 x}$$

Utilizamos las reglas de derivación, para hallar la primera derivada $y'(x)$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{3}{8}\left(\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen}x} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) - \frac{3}{8}\frac{\cos^3 x + 2\cos x\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} - \frac{\cos^5 x + 4\cos^3 x\operatorname{sen}^2 x}{4\cos^8 x}\\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen}x} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) - \frac{3}{8}\frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x}{4\cos^5 x}\\
&= -\frac{3}{8}\left(\frac{2\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}\right) - \frac{\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x}{4\cos^5 x} = -\frac{4\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x}{4\cos^5 x} = -\frac{1}{\cos^5 x}
\end{aligned}$$

Hallamos la segunda derivada de $y(x)$:

$$y'' = \frac{5\cos^4 x \operatorname{sen} x}{\cos^{10} x} = \frac{5\operatorname{sen} x}{\cos^6 x} = -\tan x \sec^5 x$$

Ejemplo 2.7.3 *Halle* $y''(x)$ *en* $y = \dfrac{\tan^4(3x)}{4} - \dfrac{\tan^2(3x)}{2} + \ln(\sec(3x))$

Solución:

Representación gráfica de las funciones establecidas original, a primera, segunda y tercera derivada de la misma función $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ respectivamente:

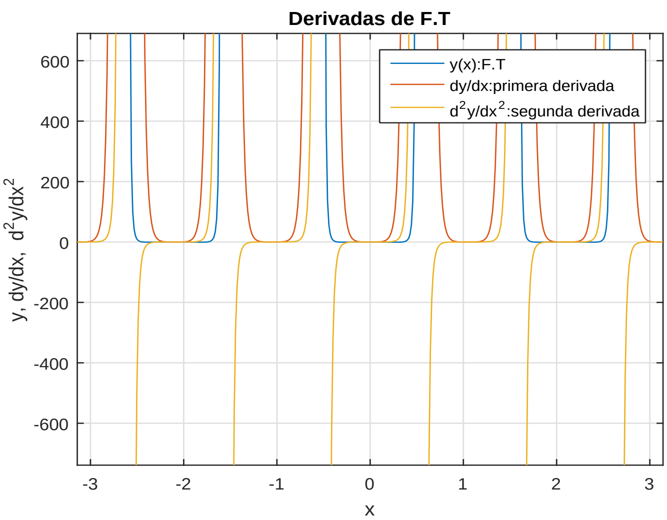


Figura 2.26: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

Hallamos $y'(x)$:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 3\tan^3(3x)\sec^2(3x) - 3\tan(3x)\sec^2(3x) + 3\frac{\sec(3x)\tan(3x)}{\sec(3x)} \\
y'(x) &= 3\tan^3(3x)\sec^2(3x) - 3\tan(3x)[\sec^2(3x) - 1] \\
y'(x) &= 3\tan^3(3x)\sec^2(3x) - 3\tan^3(3x) = \tan^5(3x)
\end{aligned}$$

Hallamos $y''(x)$: entonces $y'' = 45\tan^4(3x)\sec^2(3x)$

Ejemplo 2.7.4 *Halle* $y'''(x)$ *en* $y(x) = \dfrac{2\cos^3(3x)}{3} - \dfrac{\cos^5(3x)}{5} - \cos(3x)$

Solución:

Hallamos $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -6\cos^2(3x)\operatorname{sen}(3x) + 3\cos^4(3x)\operatorname{sen}(3x) + 3\operatorname{sen}(3x) \\ y'(x) &= 3\operatorname{sen}(3x)[-2\cos^2(3x) + \cos^4(3x) + 1] \\ y'(x) &= 3\operatorname{sen}(3x)(\cos^2(3x) - 1)^2 = 3\operatorname{sen}^5(3x) \end{aligned}$$

Hallamos $y''(x)$: entonces $y''(x) = 45\operatorname{sen}^4(3x)\cos(3x)$

Hallamos $y'''(x)$: entonces $y'''(x) = 540\operatorname{sen}^3(3x)\cos^2(3x) - 135\operatorname{sen}^5(3x)$

$y'''(x) = \operatorname{sen}^3(3x)[540\cos^2(3x) - 135\operatorname{sen}^2(3x)]$

Representación gráfica de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ respectivamente.

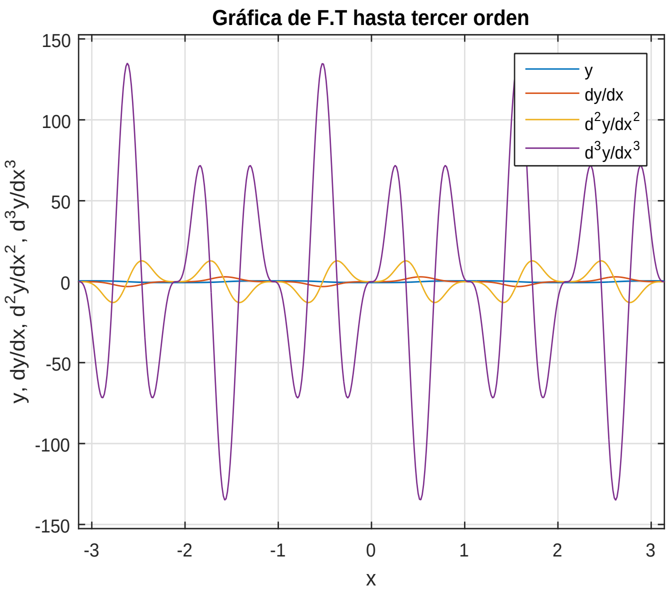


Figura 2.27: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

Ejemplo 2.7.5 *Halle* y'' *en* $y = e^x[\dfrac{3\cos(3x)}{40} - \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{40} - \dfrac{3\cos x}{8} + \dfrac{3\operatorname{sen} x}{8}]$

Solución:

Tenemos la representación gráfica de las funciones $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ respectivamente son:

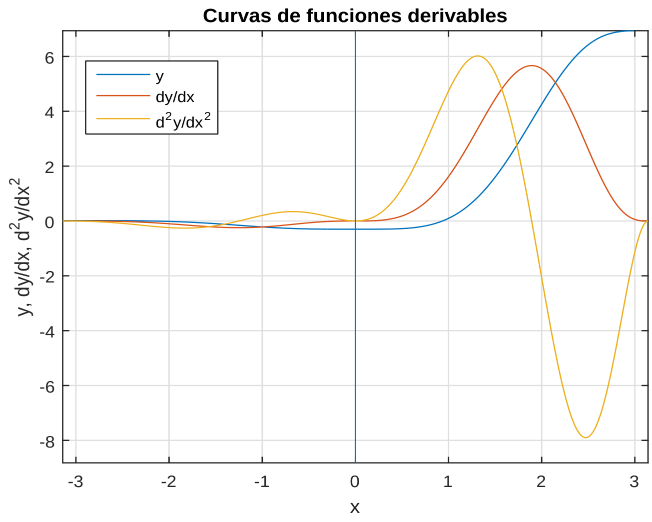


Figura 2.28: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

$$\begin{aligned}
y'(x) &= e^x\left(\frac{3\cos(3x)}{40}-\frac{\operatorname{sen}(3x)}{40}-\frac{3\cos x}{8}+\frac{3\operatorname{sen}x}{8}\right)+\\
&\quad e^x\left(\frac{-9\operatorname{sen}(3x)}{40}-\frac{3\cos(3x)}{40}+\frac{3\operatorname{sen}x}{8}+\frac{3\cos x}{8}\right)\\
&= e^x\left(10\operatorname{sen}(3x)40+\frac{6\operatorname{sen}(x)}{8}\right)=\frac{1}{4}e^x(-3\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}^3x+3\operatorname{sen}(x))\\
&= e^x\operatorname{sen}^3(x)
\end{aligned}$$

Hallamos $y''(x)$: entonces $y''=e^x\operatorname{sen}^3(x)+3e^x\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$

$$y''=e^x\operatorname{sen}^2(x)\,(\operatorname{sen}(x)+3\cos(x))$$

Ejemplo 2.7.6 *Halle la segunda derivada de la función definida mediante.*

$$f(x)=\frac{3}{8}\ln\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}-\cos x[\frac{3}{8\operatorname{sen}^2x}+\frac{1}{4\operatorname{sen}^4x}]$$

Solución:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{8}[\ln(1-\cos x)-\ln(\operatorname{sen}x)]-[\frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2x}+\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4x}]\\
f'(x) &= \frac{3}{8}[\frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}]+\frac{3}{8}\frac{\operatorname{sen}^2x+2\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}+\frac{\operatorname{sen}^2x+4\cos^2x}{4\operatorname{sen}^5x}]\\
f'(x) &= \frac{6\operatorname{sen}^4x+6\operatorname{sen}^2\cos^2x+2\operatorname{sen}^2+8\cos^2x}{8\operatorname{sen}^5x}=\frac{8\operatorname{sen}^2x+8\cos^2x}{8\operatorname{sen}^5x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^5x}
\end{aligned}$$

Luego la segunda derivada es $f''(x)=-5\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^6x}$

2.8. Derivada funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas definidas como $u = F.T(x) = u(x)$ sean derivables es su dominio respectivo y verifican las siguientes propiedades, [13]:

1. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen}(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos}(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\arctan(u) = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot}(u) = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccsc}(u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Ejemplo 2.8.1 *Halle la primera derivada de la función* $f(x) = \ln(\arctan(e^x))$

Solución: Uso de propiedades de funciones trigonométricas inversas

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\arctan(e^x)}\frac{d}{dx}(\arctan(e^x)) \\ f'(x) &= \frac{1}{\arctan(e^x)}\frac{1}{1+e^{2x}}[0.2cm] \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8.2 *Halle la segunda derivada de la función* $y = \dfrac{2\arctan x}{3} + \dfrac{\arctan(\frac{x}{1-x^2})}{3}$

Solución: Hallamos $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{2(x^2+1)} + \frac{(1-x^2)^2}{3(1-x^2)^2+3x^2}\frac{2x^2-x^2+1}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2}{3(x^2+1)} + \frac{(1-x^2)^2}{3(1-x^2)^2+3x^2}\frac{2x^2-x^2+1}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2}{3(x^2+1)} + \frac{1+x^2}{3(x^4-x^2+1)} \\ &= \frac{2x^4-2x^2+2+x^4+2x^2+1}{3(x^4-x^2+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{3x^4+3}{3(x^6+1)} = \frac{x^4+1}{x^6+1} \end{aligned}$$

Hallamos $y''(x)$:

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{4x^3(x^6+1)-6x^5(x^4+1)}{(x^6+1)^2}\\
y'' &= \frac{-2x^9-6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2}
\end{aligned}
$$

Representación gráfica de funciones $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ respectivamente y estos son:

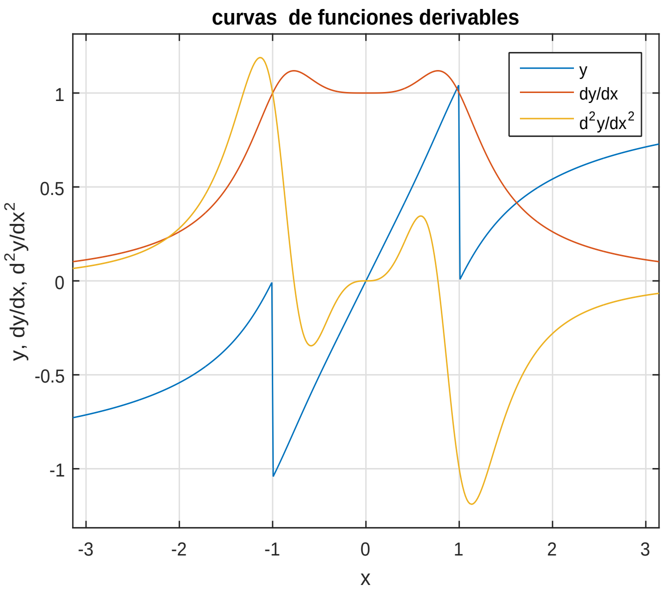


Figura 2.29: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

Ejemplo 2.8.3 *Halle* $y'(x)$ *en* $y = \frac{\sqrt{2}}{3}.\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{\ln(x-1)}{6} + \frac{\ln(x+1)}{6}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{2}{(2+x^2)\sqrt{2}} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1)}{6(x+1)}\\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{(2+x^2)} + \frac{x+1-x+1}{6(x^2-1)}\\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{(2+x^2)} + \frac{1}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2-2+2+x^2}{3(2+x^2)(x^2-1)}\\
&= \frac{x^2}{x^4+x^2-1}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.8.4 *Halle y'' en* $y = \dfrac{1}{3}\ln(\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}}) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}})$

Solución:

Uso de propiedades de logaritmos y hallemos $y'(x)$

$$y = \frac{1}{6}[\ln(x^2+2x+1) - \ln(x^2-x+1)] + \frac{1}{\sqrt{3}}.\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2x+2}{6(x^2+2x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{6/\sqrt{3}}{3+(2x-1)^2} \\
&= \frac{2x+2}{6(x^2+2x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{2}{4(x^2-x+1)} \\
&= \frac{x+1}{3(x^2+2x+1)} - \frac{x+1}{3(x^2-x+1)} \\
&= -\frac{x(x+1)}{(x^4+x^3+x+1)} = -\frac{x}{x^3+1}
\end{aligned}$$

Hallemos y'', esto es. $y'' = -\dfrac{x^3+1-3x^3}{(x^3+1)^2} = \dfrac{2x^3-1}{(x^3+1)^2}$. La representación gráfica de las funciones derivadas.

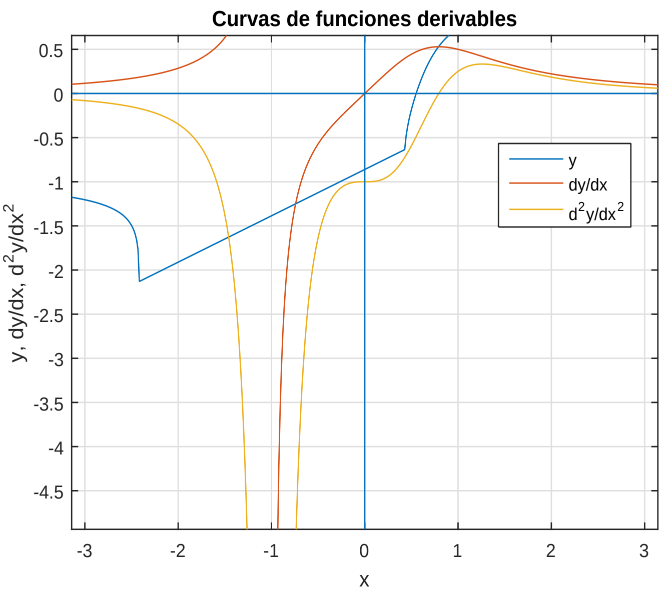


Figura 2.30: Derivadas de $f(x)$ de orden superior

Esta es la representación gráfica de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ respectivamente estos son: las trayectorias de color azul para la función original, las trayectorias de color rojo representan familia de curvas para la primera derivada, mientras las trayectorias de color naranja para la segunda derivada de la función $f(x)$. Uso de reglas de derivación para funciones cocientes de expresión radical, funciones trigonométricas inversas de arco tangente y funciones logarítmicas cocientes definidas en su dominio contenidos en la recta real hasta segundo orden llamados derivadas de orden superior, por ello es necesario conocer la definición de derivada de una función real y de orden superior.

Ejemplo 2.8.5 *Halle y' en $y = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-x^2})$*

Solución:

Utilizando las propiedades de derivación de funciones trigonométricas inversas, especialmente para arco seno de argumento radical en la variable x

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})}}.\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{x^2}}.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \\
y' &= -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

esta representa la curva para cualquier punto arbitrario del dominio de definición.

Ejemplo 2.8.6 *Halle y' en $y = \sqrt{arcsec(6x)}$*

Solución:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \frac{\ln(\operatorname{arcsec}(6x))}{2} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2\operatorname{arcsec}(6x)}.\frac{6}{(6x)\sqrt{36x^2-1}} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2\operatorname{arcsec}(6x)}.\frac{1}{(x)\sqrt{36x^2-1}} \\
y' &= \frac{y}{2\operatorname{arcsec}(6x)}.\frac{1}{(x)\sqrt{36x^2-1}} \\
y' &= \frac{ln(\operatorname{arcsec}(6x))}{4\operatorname{arcsec}(6x)}.\frac{1}{(x)\sqrt{36x^2-1}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8.7 *Halle y' en $y = arcsec(\frac{e^x - 1}{e^{-x} + 1})$*

Solución:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{e^x(e^{-x}+1) + e^{-x}(e^x - 1)}{(e^{-x}+1)^2} . \frac{1}{\frac{e^x - 1}{e^{-x}+1} . (\sqrt{(\frac{e^x - 1}{e^{-x}+1})^2 - 1})} \\
y' &= \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(e^{-x}+1)^2} . \frac{(e^{-x}+1)^2}{(e^x - 1) . \sqrt{(e^x - 1)^2 - (e^{-x}+1)^2}} \\
y' &= \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(e^x - 1) . \sqrt{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x} - 2)}}
\end{aligned}
$$

2.8.1. Ejercicios propuestos

Halle la primera derivada de la función real definida

1. $y = \frac{\ln(x+2)}{2} - \frac{\ln(x^2 + 4x + 4)}{6} + \frac{2x+3}{12(x+2)}$

2. $y = \frac{1}{6} . \ln(\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 - 8}) + \frac{2x+3}{2(x^2 - 2x + 3)}$

3. $y = \frac{3e^x}{2e^x + 3e^{-x}} + \frac{2e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

4. $y = \frac{3}{8} . \ln(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}) - \frac{3 \cos x}{8 \operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos x}{4 \operatorname{sen}^2 x}$

5. $y = \frac{\sqrt{3}}{6} . \arctan(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}) - \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 1}{6(x^2 - x + 1)}$

6. $y = \arctan(\frac{4x-3}{5}) - \arctan(\frac{3x-8}{3x-2}) + \frac{2}{6(x+2)}$

7. $y = 2 \arccos(\frac{3 + 4\cos x}{4 - 3\cos x})$

8. $y = \frac{9}{2} . \arctan(x) + \frac{7x^2 + 13x - 3}{6(x^2+1)^2}$

9. $y = \arctan(\sqrt{x-1}) + \arccos(\sqrt{\frac{x-1}{x}})$

10. $y = \tan(x) - \frac{\tan^3(x)}{3} + \frac{\tan^5(x)}{5}$

11. $y = \dfrac{2\cos 3x}{3} - \dfrac{\cos^5 x}{5} - \cos x$

12. $y = \dfrac{\sec(1-3x)}{\sec(1-3x) + \tan(1-3x)}$

13. $y = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

14. $y = -\dfrac{\arctan(x+1)}{2} - \dfrac{x+4}{2(x^2+2x+2)}$

15. $y = \arcsin(\sqrt{3-\sqrt{3x}}) + \arcsin(\sqrt{1-\sqrt{x}})$

Teorema 2.8.1 *Sea una función trigonométrica $y = f(x)$ derivable en un punto del dominio de definición, entonces cumple las siguientes propiedades como regla de derivación.*

1. Si $y = \operatorname{sen} u$ entonces $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \dfrac{du}{dx}$
2. Si $y = \cos u$ entonces $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$
3. Si $y = \tan u$ entonces $\dfrac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$
4. Si $y = \cot u$ entonces $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$
5. Si $y = \sec u$ entonces $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$
6. Si $y = \csc u$ entonces $\dfrac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

2.8.2. Ejercicios propuestos

1. Halle y'' en $\ln y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$
2. Halle y'' en $y = \dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$
3. Halle y'' en $y = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x) - x\cos(2x)}{\cos(2x) + x\operatorname{sen}(2x)}\right) + \dfrac{\tan(2x)}{\cos(2x) + x\operatorname{sen}(2x)}$
4. Halle y'' en $y = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\right)$
5. Halle y'' en $y = \dfrac{9\arctan x}{4} - \dfrac{9x^2+5x+4}{2(x^2+1)^2}$

6. Halle y'' en $y = \frac{2}{3}\ln(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$

7. Halle y'' en $y = \frac{x\sqrt{36-x^2}}{5} + \frac{36}{5}\operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{6})$

8. Halle y' en $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x})$

9. Halle y' en $y = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + \frac{4}{x^2+4}$

10. hale y' en $y = \frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{2}\ln(\tan(\frac{x}{2}))$

2.9. Aplicaciones de la derivada de una función: Parte 1

En la práctica, el concepto de la derivada de funciones reales, no solamente proporciona pendientes de las rectas tangentes a una curva en un punto P_0, ni velocidades de las partículas en movimiento sobre una trayectoria rectilíneo o curvilínea, sino permite definir razones de cambio o tasas o crecimientos poblacionales, acontecimientos físicos, químicos, biológicos y permite el análisis y estudio del medio ambiente, eficiencia de producción, utilidades tasa de inflación y rapidez con que varía una variable dependiente de cantidades específicas respecto a otra variable específica independiente. Además la definición y propiedades de derivación de una función nos proporciona una herramienta poderosas para resolver problemas de optimización, para calcular extremos relativos de una función real que describan situaciones reales, por otro lado el uso de las propiedades de derivación, permite realizar operaciones de costos marginales en el área de economía y administración, además las propiedades de derivación de funciones permiten aplicar a límites de funciones cocientes de resultados indeterminados utilizando regla de Hospital, finalmente las derivadas para calcular los limites de funciones.

Definición 2.8 (Razón de cambio de una función) *Dada una función $y = f(x)$, se define incremento de x como la diferencia de las variables independientes $\Delta x = x_2 - x_1$; el incremento de y denotado por $\Delta y = y_2 - y_1$ son cantidades exactas producidas. El cociente de los incrementos de cantidades discretas, se denominan razón* *de cambio y de respecto a la variable x definida mediante, [6].*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Definición 2.9 (Razón de cambio instantáneo de una función) *Dada una función real $y=f(x)$ y los incrementos respectivos de la variable dependiente y y la variable independiente x respectivamente, la razón de cambio de una función se aplica el operador límite a cada miembro, esto es,[6]:*

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Razón de cambio porcentual es: $RCP=\dfrac{y'(x_0)}{y(x_0)}$ cien por ciento, [4].

Ejemplo 2.9.1 *Dada la ecuación de Boole de gases ideales a temperatura constante definido $PV=cte$ mediante el modelo matemático $P=\dfrac{(3+t^2)^2}{2+t^2}cmHg$ y el volumen inicial es $V_0=60cm3$, donde t es el tiempo (seg). Calcule razón de cambio del volumen con respecto al tiempo al cabo de $t=10$ segundos.*

Solución:

Representación gráfica de razón de cambio del volumen $v'(t)$ al cabo de 0.1min.

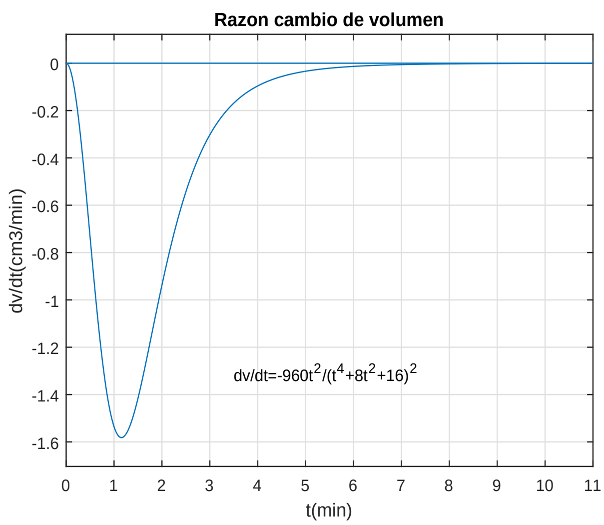


Figura 2.31: Derivada de función de volumen

Sea la función de volumen del gas ideal es $V=\dfrac{K(2+t^2)}{(3+t^2)^2}$ entonces el volumen inicial será $V_0=\frac{2K}{16}=60$ entonces $K=480$, reemplazando se tiene el volumen

arbitrario en tiempo arbitrario: $V = \dfrac{480(2+t^2)}{(4+t^2)^2}\text{cm}^3$.
Utilizando la regla de derivación se tiene:

$$\begin{aligned} V' &= 480.\frac{2t(4+t^2)^2 - 4t(4+t^2)(2+t^2)}{(4+t^2)^4} \\ V' &= -480\frac{2t^2}{(4+t^2)^3}\text{cm}^3/\text{seg} \end{aligned}$$

Al cabo de $t = 10$ segundos,
$V' = -480(\dfrac{2t^2}{(4+t^2)^3})|_{10} = -\dfrac{375}{8788}\text{cm}^3/\text{seg}$; significa que disminuye en esta cantidad al cabo de 10 segundos.

Ejemplo 2.9.2 *En los registros públicos de cierta provincia está registrada una propiedad de inmueble una casa que consta de tres habitaciones, t representa años después del año 2010. El impuesto predial medio de la propiedad está descrita por un modelo matemático* $I(t) = 30t^2 + 40t + 500$ *nuevos soles.*
¿A qué razón aumentará el impuesto predial medio de la propiedad con respecto al tiempo en el año del 2020?.
¿A qué razón de cambio porcentual crecerá el impuesto predial medio de la propiedad con respecto al tiempo en el año del 2020*?.*

Solución:

1. Hallamos razón de cambio del impuesto predial, esto es: $I' = 60t + 40$nuevos soles/año.
   En el año 2010,el impuesto del predio fue y $t = 0$ año cero, $I'(0) = 60(0) + 40 = 40$nuevos soles/año.
   En el año 2020 el impuesto del predio será, en $t = 10$ años $I'(10) = (60t + 40)|_{10} = 640$nuevos soles/año.

2. Razón de cambio porcentual será: Para ello calculamos el impuesto predial al cabo de $t = 10$ años, esto es: $I(10) = (30t^2 + 40t + 500)|_{10} = 3900$ nuevos soles, luego el cociente de:
   $R.C.P = \dfrac{y'(10)}{y(10)} = \dfrac{640}{3900} = 0.166$ porcentual, significa el impuesto predial ha incrementado al cabo de 10 años en 16.6 por ciento.

Representación gráfica de la función de impuesto predial de una propiedad y la razón de cambio esto es:

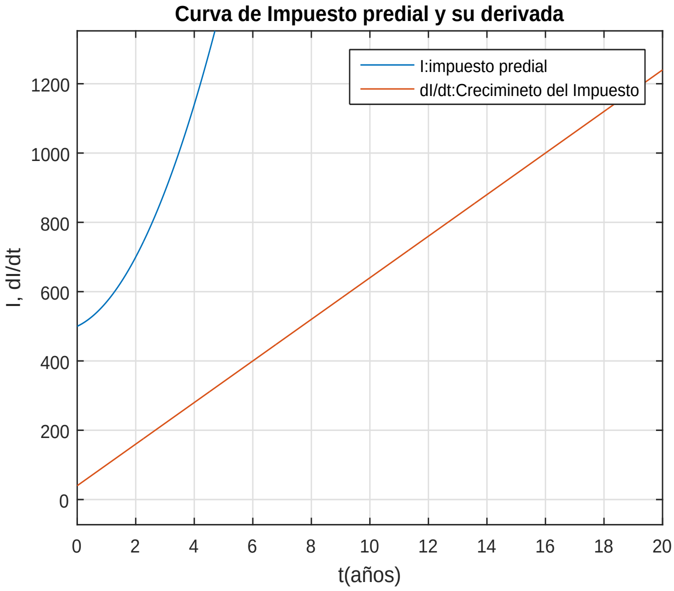


Figura 2.32: Derivada de función impuesto predial

Ejemplo 2.9.3 *La temperatura de cocinado un producto disminuye de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton* $T(t) = 10\dfrac{(4t^2+16t+75)}{t^2+4t+10}{}^\circ C$*, donde* t *representa horas.*

1. *Cual es la temperatura inicial del producto cocinado después de sacar del horno a* $75^\circ C$*.*

2. *Encuentre razón de cambio de la función de temperatura al cabo de* $t = 1$ *horas ,* $t = 2$ *horas y* $t = 3$*horas.*

Solución:

1. Temperatura del producto cocinado $T(0) = 10\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(4t^2+16t+75)}{t^2+4t+10} = 75°\text{C}$
2. Hallamos razón de cambio para cada tiempo considerado, esto es:

$$\begin{aligned} T'(t) &= 10\frac{(8t+16)(t^2+4t+10)-(2t+4)(4t^2+16t+75)}{(t^2+4t+10)^2} \\ T'(t) &= -20\frac{35t+70}{(t^2+4t+10)^2}{}^\circ C \end{aligned}$$

velocidad que disminuye la temperatura del producto cocinado.

En $t = 1$ horas se tiene: $T'(1) = -700\dfrac{t+2}{(t^2+4t+10)^2}|_1 = -9.33°\text{C/horas}.$

En $t = 2$ horas se tiene: $T'(2) = -700\dfrac{t+2}{(t^2+4t+10)^2}|_2 = -5.78°\text{C/horas}.$

En $t = 3$ horas se tiene: $T'(3) = -700\dfrac{t+2}{(t^2+4t+10)^2}|_3 = -1.15°\text{C/horas}.$

La representación gráfica de la disminución de temperatura del producto cocinado después de retirar del horno a medida que pasan las horas.

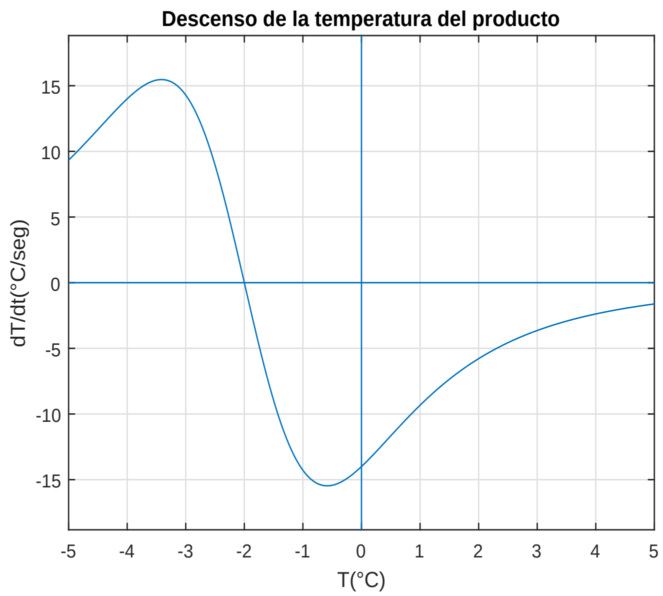


Figura 2.33: Derivadas de función temperatura

Ejemplo 2.9.4 *Si un estanque tiene* 5000 *galones de agua, la cual drena desde el fondo del tanque en* 10*minutos, la ley de Torricelli define el volumen del agua que queda en el estanque después de t minutos es* $V(t) = 5000(1 - \frac{t^2}{100})^2$ *galones de agua, definida en un intervalo* $0 \le t \le 10$ *minutos. Encontrar la razón del drenado de volumen de agua del estanque después de* 5*min y* 8*min respectivamente.*

Solución:

Representación gráfica del drenado de agua es: hallamos cantidad de agua que ha drenado al cabo de $t = 5$ min.

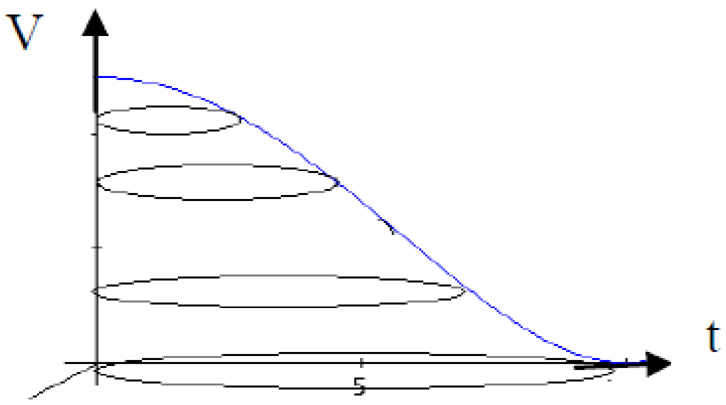


Figura 2.34: Drenado de agua del estanque en minutos

Haciendo uso de las propiedades de derivación para la función de volumen respecto al tiempo t, esto es:

$$V'(t) = 5000(1 - \frac{t^2}{100})^2.\frac{-2t}{100} = -100t.(1 - \frac{t^2}{100})^2 \text{galones/min.}$$

Hallamos cantidad de agua que ha drenado al cabo de $t = 5$ min

$V'(5) = -100. \lim\limits_{t \to 5} t.(1 - \dfrac{t^2}{100})^2 = -375$ galones/min.

Hallamos cantidad de agua que ha drenado al cabo de $t = 8$ min

$V'(8) = -100. \lim\limits_{t \to 8} t.(1 - \dfrac{t^2}{100})^2 = -288$ galones/min.

Ejemplo 2.9.5 *Una partícula se mueve a lo largo del eje X, cuya posición en cualquier tiempo es $x(t) = \dfrac{2t^2}{t^2 - 3t + 2}$ pies, para todo $t \geq 0$, calcule:*

1. *Velocidad y aceleración en un instante de tiempo arbitrario t de la partícula.*

2. *Encuentre la distancia recorrida, velocidad y aceleración en los primeros* 0.85 *segundos.*

3. *El movimiento de la partícula es acelerado y/o desacelerado en la región establecida.*

4. *Trace las gráficas de las funciones de posición, velocidad y aceleración.*

Solución:

1. Por definición la velocidad es la derivada del desplazamiento respecto al tiempo y usar la propiedad cociente de la derivación.
   $x'(t) = \dfrac{4t(t^2-3t+2)-(2t-3)(2t^2)}{(t^2-3t+2)^2} = \dfrac{-6t^2+8t}{(t^2-3t+2)^2}$pies/seg
   esta es la velocidad de la partícula para el instante t arbitrario.
   Para hallar la aceleración de la partícula, derivamos la función de velocidad de la partícula y aplicamos propiedad de logaritmo y reglas de derivación:
$$\begin{aligned}
\ln x'(t) &= \ln(\frac{-6t^2+8t}{(t^2-3t+2)^2}) = \ln(-6t^2+8t) - 2.\ln(t^2-3t+2)\\
\frac{x''(t)}{x'(t)} &= \frac{-12t+8}{-6t^2+8t} - \frac{2t-3}{t^2-3t+2}\\
x''(t) &= x'(t)(\frac{-12t+8}{-6t^2+8t} - \frac{2t-3}{t^2-3t+2})\\
x''(t) &= \frac{12t^2-24t+16}{(t^2-3t+2)^2}\text{pies/seg}^2
\end{aligned}$$
   es la aceleración de la partícula en el tiempo arbitrario

2. La distancia recorrida de la partícula al cabo de $t = 0.85$ segundos y esto es:
   La posición de la partícula es: $x(0.85) = \lim\limits_{t\to 0.85} \dfrac{2t^2}{t^2-3t+2} = 9.85$pies.
   La velocidad de la partícula es:$x'(0.85) = \lim\limits_{t\to 0.85} \dfrac{-6t^2+8t}{(t^2-3t+2)^2} = 85$pies/seg,
   La aceleración es: $x''(0.85) = \lim\limits_{t\to 0.85} \dfrac{12t^2-24t+16}{(t^2-3t+2)^2} = 573$ pies/seg2.

3. El movimiento de la partícula es acelerado en las regiones $0 \le t < 1$ y $1 \le t < 1.33$; desacelera en las regiones $1.33 \le t < 2$ y $2 \le t < \infty$
   , estos indican el cambio de la concavidad hacia arriba y luego hacia abajo en su desplazamiento la partícula en el tiempo arbitrario, los llamados puntos de inflexion sobre la trayectoria descrita del móvil.

4. Representación gráfica de las funciones posición, velocidad y aceleración de la partícula.

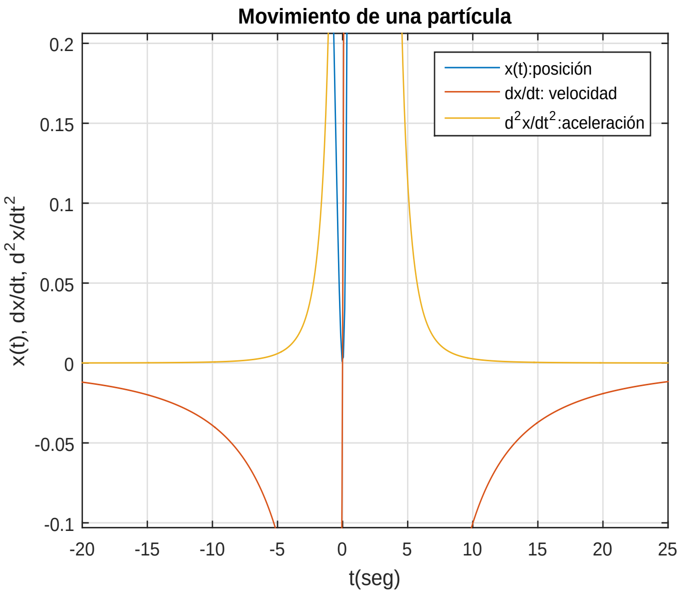


Figura 2.35: Posición, velocidad y aceleración del móvil

Ejemplo 2.9.6 *La Dirección de Salud de la ciudad de Puerto Maldonado ha reportado el brote de una epidemia del dengue y modelado por una función logística* $f(t) = \dfrac{1000}{4 + 76(\exp)^{-0.12t}}$ *miles de personas que habían contraído el mal, donde* t *indica dias, del mes de mayo del año* 2016*:*

1. *Determine la velocidad de propagación de la epidemia al cabo de una semana.*

2. *Determine la velocidad de propagación de la epidemia al cabo de cuatro semana.*

Solución:

La población de personas contagiadas por el virus de Dengue en la ciudad de Puerto Maldonado inicialmente es:

$$f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1000}{4 + 76(\exp)^{-0.12t}} = 14000 \text{ personas.}$$

Ahora la velocidad de propagación del virus en cualquier tiempo arbitrario resulta:

$$f'(t) = 9120 \frac{(\exp)^{-0.12t}}{[4 + 76(\exp)^{-0.12t}]^2}$$

miles de personas en la ciudad de Puerto Maldonado, en cualquier tiempo.

Hallamos el límite de la velocidad de propagación del virus al cabo de $t = 1$ semana.

$$\begin{aligned} f'(1) &= 9120 \lim_{t\to 1} \frac{(\exp)^{-0.12t}}{[4 + 76(\exp)^{-0.12t}]^2} = 0.19 \ \text{ miles de personas} \\ f'(1) &= 190 \text{ personas fueron contagiados por el virus al cabo de una semana} \end{aligned}$$

Hallamos el límite de la velocidad de propagación del virus al cabo de cuatro semanas esto es, $t = 4$ semanas.

$$\begin{aligned} f'(4) &= 9120 \lim_{t\to 4} \frac{(\exp)^{-0.12t}}{[4+76(\exp)^{-0.12t}]} = 0.38 \ \text{ miles de personas} \\ f'(1) &= 380 \text{ personas fueron contagiados por el virus al cabo de cuatro semanas} \end{aligned}$$

Representación gráfica de la velocidad de propagación del virus dengue en la ciudad de Puerto Maldonado en el mes de mayo del año 2016.

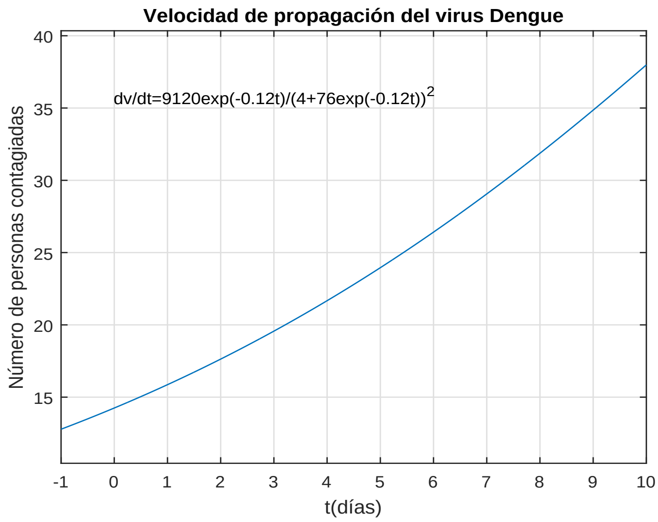


Figura 2.36: Propagación del virus Dengue

2.10. Aplicación de la derivada de una función real: Parte 2

Uno de los aspectos más importantes de nuestra vida diario es la optimización del tiempo, costos de producción, consumo de los artículos de primera necesidad y uso de equipos e instrumentos a nuestro alcance, además el hombre busca el aprovechamiento adecuada de los recursos naturales de la región y del país. Un agricultor desea preparar una mezcla de insecticidas para una buena fumigación y efectiva de hortalizas y minimizar el costo de los insumos, o pretende optimizar las utilidad de los productos. En las diferentes profesiones se presentan problemas de distinta naturaleza las cuales requieren ser expresadas a través de una función de variable real y estos a su vez deben ser maximizados o minimizados según la naturaleza del problema en base a las condiciones del objeto de estudio, es especial uso de conceptos de extremos relativos.

2.11. Valores extremos locales y absolutos

Definición 2.10 (Máximo absoluto de una función) *Dada una función real definida $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ es continua en un intervalo abierto $I = \langle a, b\rangle$ tiene un valor máximo absoluto en x_0 del dominio $I \subset \mathbb{R}$, si cumple $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I$,[4], [13].*

Definición 2.11 (Máximo relativo de una función) *Dada una función real definida $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ es continua en un intervalo abierto $I = \langle a, b\rangle$ tiene un valor máximo relativo en el x_0 del dominio del intervalo contenido en la recta real, esto es, $I \subset \mathbb{R}$, si existe un número positivo $\delta > 0$ y cumple $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I$. La pendiente de la recta tangente a la curva C: es horizontal en x_0 del dominio, $f'(x) = 0$, [4].*

Representación gráfica de la función máximo absoluto y relativo en su dominio.

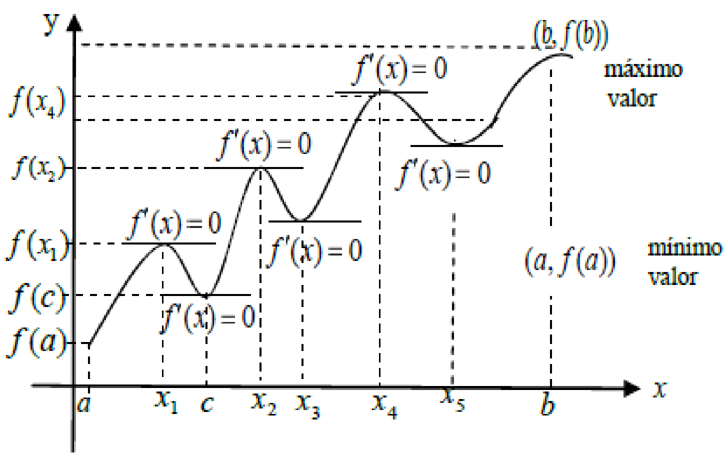


Figura 2.37: Máximos y mínimos de una función

Del gráfico mostrado podemos afirmar el punto $(b, f(b))$ es máximo absoluto de la función, esto $x \in [a, b]$.

La función $y = f(x)$ es derivable en todo los puntos del intervalo cerrado $x \in [a, b]$, por su puesto la función es continua en el intervalo cerrado, la función $f(x)$ tiene máximo relativo en los puntos x_1, x_2, x_4 de modo la primera derivada de la función real es nula en estos puntos, $f'(x_i) = 0$, $x_i = 1, 2, 4$, por consiguiente los pares $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ y $(x_4, f(x_4))$ son los llamados máximos relativos de la función sobre la curva C: definidas el el intervalo abierto $x \in< a, b >$, contenida en recta real.

Definición 2.12 (Mínimo absoluto de una función) *Dada una función real definida $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ es continua en un intervalo abierto $I = \langle a, b\rangle$ tiene un valor máximo absoluto en x_0 del dominio $I \subset \mathbb{R}$, si cumple $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I$, [13].*

Definición 2.13 (Mínimo relativo de una función) *Dada una función real definida $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ es continua en un intervalo abierto $I = \langle a, b\rangle$ tiene un valor mínimo relativo en el x_0 del dominio $I \subset \mathbb{R}$, si existe un número positivo $\delta > 0$ y cumple $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I$. La pendiente de la recta tangente a la curva C: es horizontal en el punto x_0 del dominio, $f'(x) = 0$, [13].*

Del gráfico mostrado podemos afirmar el punto $(a, f(a))$ es mínimo absoluto de la función, esto $x \in [a, b]$.
La función $y = f(x)$ es derivable en todo los puntos del intervalo cerrado $x \in [a, b]$, por su puesto la función es continua en el intervalo abierto o cerrado, la función $f(x)$ tiene mínimo relativo en los puntos c, x_3, x_5 de modo la derivada de la función es nula en estos puntos, $f(x_i) = 0$, $x_i = 1, 2, 4$, por consiguiente los pares $(c, f(c))$, $(x_3, f(x_3))$ y $(x_5, f(x_5))$ son mínimos relativos sobre la curva C: en $x \in< a, b >$.

2.12. Criterios para determinar extremos relativos

Definición 2.14 *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ tiene extremo relativo en el punto x_0 y existe $f'(x) = 0$ y se obtienen puntos críticos puntos estacionarios y están sobre el eje X. En cada punto se establece los máximos o mínimos relativos de $f(x)$ entonces resultan rectas horizontales a la curva.Si $f'(x) \neq 0$ no existe se llama punto singular cuyas tangentes son horizontales a la curva, no determinan máximos, ni mínimos relativos, pero pueden determinar punto de inflexión sobre la curva C, definidos en el intervalo $\langle a, b\rangle$, interpretación geométrica [4].*

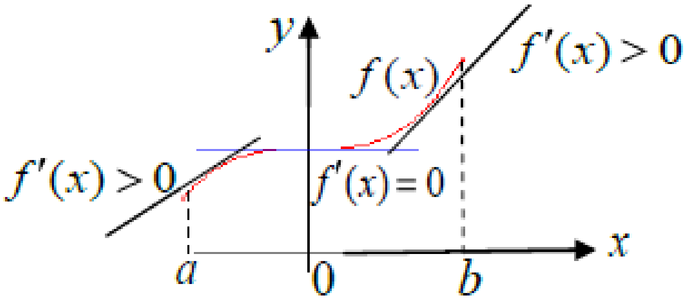


Figura 2.38: Punto crítico de f(x)

Definición 2.15 (Criterios de regiones crecientes o decrecientes) *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en $\langle a, b\rangle$ entonces cumple:*
Si dice una función $f(x)$ es creciente en el intervalo I, si para todo x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ o simplemente verifica $f'(x) > 0$ en todo $x \in \langle a, b\rangle$.

Si dice una función $f(x)$ es decreciente en el intervalo I, si para todo x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$ o simplemente verifica $f'(x) < 0$ en todo $x \in \langle a, b\rangle$, [4],[21].

Teorema 2.12.1 (Criterio de la primera derivada) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ es función continua en $I = x \in \langle a, b\rangle$ y $x = c$ es un punto crítico de $f(x)$ entonces $f'(x) = 0$ verifica las siguientes condiciones.*

1. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \langle a, c\rangle$ y si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \langle c, b\rangle$ entonces el par $(c, f(c))$ es máximo relativo de la función $f(x)$.

2. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \langle b, c\rangle$ y si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \langle c, d\rangle$ entonces el par $(c, f(c))$ es mínimo relativo de la función $f(x)$.

Interpretación geométrica de extremos relativos por primer criterio de la derivada de una función, la función es máxima en punto crítico del par $(x_0), y_0$, entonces la función en primera derivada es creciente y luego esta misma función es decreciente.Similar para que la función sea mínima en un punto crítico del par $(x_0), y_0$, entonces la función en primera derivada es decreciente y luego esta misma función es creciente:

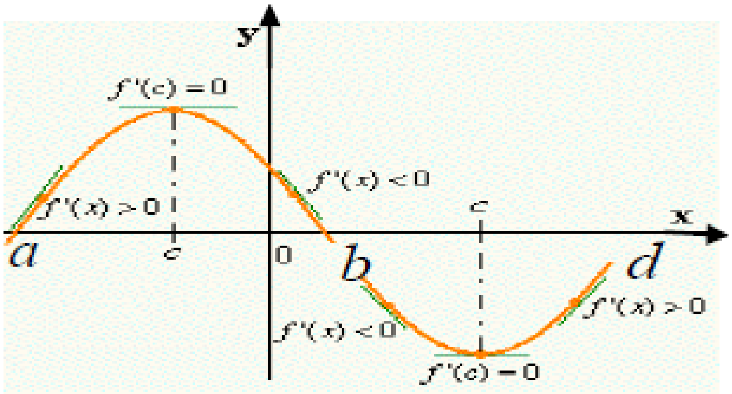


Figura 2.39: Primer criterio de la derivada

Teorema 2.12.2 *Sea $f(x)$ una función continua en $I = \langle a, b\rangle$ y sea x_0 un punto crítico de $f(x)$ tal que $f'(x) = 0$, entonces existe $f''(x)$ en todo $x \in \langle a, b\rangle$ y afirmamos las siguientes:*

1. Si $f''(x) < 0$ entonces el par $(x_0, f(x_0))$ es máximo relativo.
2. Si $f''(x) > 0$ entonces el par $(x_0, f(x_0))$ es mínimo relativo.
3. Si $f''(x) = 0$ entonces del par $(x_0, f(x_0))$ no se puede afirmar nada.

Definición 2.16 (Concavidad y puntos de inflexión) *Un punto $(x_0, f(x_0))$ que pertenece a la curva C: es punto de inflexión, si la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $\langle a, x_0\rangle$ y la vez es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $\langle x_0, b\rangle$ o viceversa, [4], representación gráfica (Figura 2.40).*

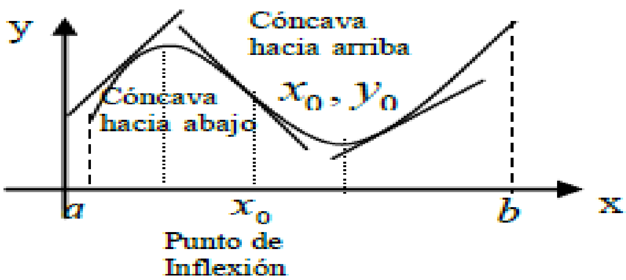


Figura 2.40: Concavidad y puntos de inflexión

Teorema 2.12.3 (Condiciones para calcular puntos de inflexión) *Una función $f(x)$ continua sobre un intervalo cerrado I, y x_0, es punto crítico de $f'(x) = 0$, si existe un intervalo abierto $x_0 \in \langle a, b\rangle$ entonces el par es $(x_0, f(x_0))$ máximo o mínimo relativo de $f(x)$ y verifica las siguientes:*

Representación gráfica(Figura 2.41), para decisión de punto de inflexion de una función:

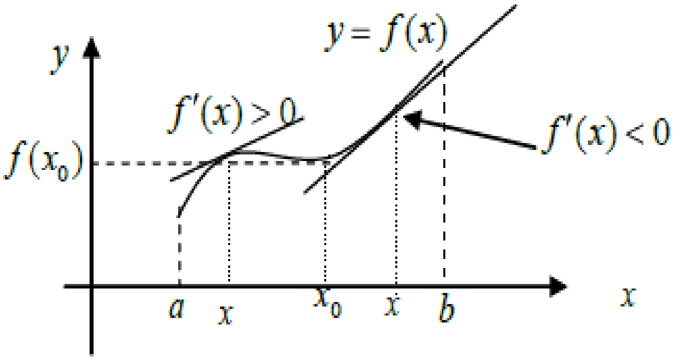


Figura 2.41: Criterios para encontrar puntos de inflexión

1. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in \langle a, x_0\rangle$ y si $f''(x) < 0$ para todo $x \in \langle x_0, b\rangle$ entonces el par $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión de $f(x)$.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in \langle a, x_0\rangle$ y si $f''(x) > 0$ para todo $x \in \langle x_0, b\rangle$ entonces el par $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión de $f(x)$.
3. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in \langle a, x_0\rangle$ y si $f''(x) > 0$ para todo $x \in \langle x_0, b\rangle$ entonces el par $(x_0, f(x_0))$ no es punto de inflexión de $f(x)$.
4. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in \langle a, x_0\rangle$ y si $f''(x) < 0$ para todo $x \in \langle x_0, b\rangle$ entonces el par $(x_0, f(x_0))$ no es punto de inflexión de $f(x)$.

.

Ejemplo 2.12.1 *Halle los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y regiones crecientes y decrecientes de la función definida* $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

Solución:

1. Hallemos lo puntos críticos de la función $f(x)$ y hacemos $f'(x) = 0$
   $f'(x) = -12x^2 + 6x + 18$ entonces $f'(x) = -12x^2 + 6x + 18 = 0$ resolviendo la ecuación de segundo grado y resulta $x = -1$, $x = \dfrac{3}{2}$, establecemos los intervalos abiertos $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1.5\rangle$, $\langle 1.5, \infty\rangle$, representación gráfica.

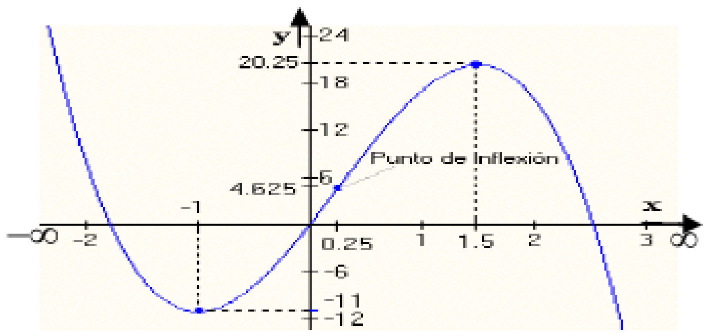


Figura 2.42: Region creciente,decreciente y puntos de inflexión

2. Determinamos las regiones crecientes y decrecientes.
   En todo el intervalo $x \in \langle -\infty, -1\rangle$, las pendientes $f'(x) < 0$ entonces la función en esta region es decreciente.
   En todo el intervalo $x \in \langle -1, 1.5\rangle$, las pendientes $f'(x) > 0$ entonces la función en esta region es creciente.
   En todo el intervalo $x \in \langle 1.5, \infty\rangle$, las pendientes $f'(x) < 0$ entonces la función en esta region es decreciente.

3. Determinar máximos o mínimos relativos de la función. Utilizando el criterio de la primera derivada, representación gráfica, Figura $2 \cdot 42$.

   Sea punto crítico $x = -1$ y análisis de las pendientes en las regiones dadas sobre la curva C:
   Si $f'(x) < 0$ en todo $x \in \langle -\infty, -1\rangle$ y $f'(x) > 0$ en todo $x \in \langle -1, 1.5\rangle$ entonces el par $(-1, f(-1)) = (-1, -11)$ es mínimo relativo.
   Sea punto crítico $x = 1.5$ y análisis de las pendientes en las regiones dadas sobre la curva C:

Si $f'(x) > 0$ en todo $x \in \langle -1, 1.5\rangle$ y $f'(x) < 0$ en todo $x \in \langle 1.5, \infty\rangle$ entonces el par $(1.5, f(1.5)) = (1, 20.2)$ es máximo relativo.

4. Determinar el punto de inflexión de la función $f(x)$ y para ello hallemos la segunda derivad $f''(x) = -24x + 6$ entonces $f''(x) = -24x + 6 = 0$ y resulta $x = \dfrac{1}{4}$ denominado punto crítico.
   Analizamos las regiones crecientes o decrecientes en toda la recta real, si $x \in \langle -1, 1.5\rangle$, consideramos $x = 0$ entonces $f''(0) = -24(0) + 6 = 6 > 0$ con $0 \in \langle -1, \dfrac{1}{4}\rangle$ y $f''(1) = -24(1) + 6 = -18 < 0$ con $1 \in \langle \frac{1}{4}, 1.5\rangle$ entonces el par $(\dfrac{1}{4}, f(\dfrac{1}{4})) = (\dfrac{1}{4}, 4.2)$ es punto de inflexión de la función.

Ejemplo 2.12.2 *Halle los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y regiones crecientes y decrecientes de la función definida* $f(x) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$

Solución:

1. Hallemos lo puntos críticos de la función $f(x)$ y hagamos $f'(x) = 0$.
   $f'(x) = 4x^3 - x^2 - 3x$ entonces $f'(x) = 4x^3 - x^2 - 3x = 0$ resolviendo la ecuación de tercer grado y resulta $x = 0$, $x = 1$ $x = -\dfrac{3}{4}$, llamados puntos críticos, a continuación establecemos los intervalos abiertos $\langle -\infty, \dfrac{-3}{4}\rangle$, $\langle -\dfrac{3}{4}, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ y $\langle 1, \infty\rangle$, tenemos cuatro intervalos abiertos sobre la recta real.

2. Determinamos regiones crecientes y decrecientes de la función definida en cada intervalo abierto, utilizando análisis de las pendientes son positivas o negativas en todo punto del intervalo abierto.

   Para todo $x \in \langle -\infty, \dfrac{-3}{4}\rangle$, las pendientes evaluadas en cada punto del intervalo considerado resultan $f'(x) < 0$, entonces nos permite afirmar la función $f(x)$ es decreciente.

   Para todo $x \in \langle \dfrac{-3}{4}, 0\rangle$, las pendientes evaluadas en cada punto del intervalo considerado resultan $f'(x) > 0$, entonces nos permite afirmar la función $f(x)$ es creciente.

   Para todo $x \in \langle 0, 1\rangle$, las pendientes evaluadas en cada punto del intervalo considerado resultan $f'(x) < 0$, entonces nos permite afirmar la función $f(x)$ es decreciente.

Para todo $x \in \langle 1, \infty \rangle$, las pendientes evaluadas en cada punto del intervalo considerado resultan $f'(x) > 0$, entonces nos permite afirmar la función $f(x)$ es creciente, representación gráfico.

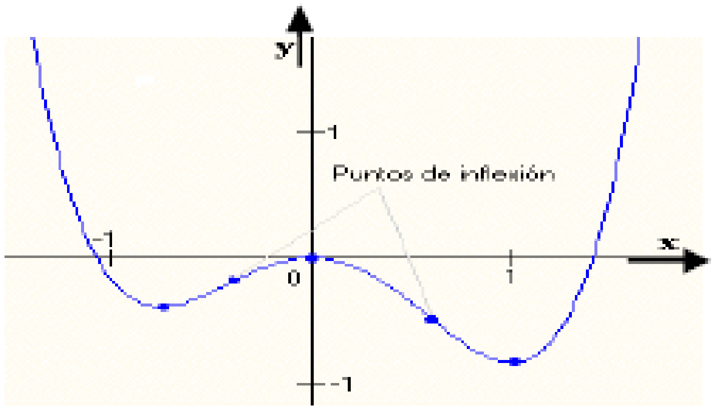


Figura 2.43: Region creciente, decreciente y puntos de inflexión

3. Determinar máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$, utilizando el segundo criterio de la derivada, para ello hallamos la segunda derivada de la función en $f'(x) = 4x^3 - x^2 - 3x$ existe para todo punto de la recta real. En efecto $f''(x) = 12x^2 - 2x - 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

   a) Sea el punto $x = -\frac{3}{4}$ y evaluar en $f''(-\frac{3}{4}) = (12x^2 - 2x - 3)|_{\frac{3}{4}} = \frac{21}{4} > 0$ entonces el par $(-\frac{3}{4}, f(-\frac{3}{4}))$ es mínimo relativo de la función $f(x)$.

   b) Analizar el punto $x = 0$, y evaluar en $f''(0) = (12x^2 - 2x - 3)|_0 = -3 < 0$ entonces el par $(0, f(0))$ es máximo relativo de la función $f(x)$.

   c) Analizar el punto $x = 1$ y evaluar en $f''(1) = (12x^2 - 2x - 3)|_1 = 7 > 0$ entonces el par $(1, f(1))$ es mínimo relativo de la función $f(x)$.

4. Determinar los puntos de inflexión de la función $f(x)$, para ello requerimos la segunda derivada, esto es: $f''(x) = 12x^2 - 2x - 3$ entonces calculamos los puntos críticos de la ecuación de segundo grado utilizando fórmula de baskara y resulta $12x^2 - 2x - 3 = 0$ entonces $x = \frac{7.2}{12}$, $x = -\frac{5.2}{12}$, a continuación establecemos los

intervalos abiertos: $\langle -\frac{3}{4}, -\frac{5.2}{12}\rangle$, $\langle -\frac{5.2}{12}, 0\rangle$, $\langle 0, \frac{7.2}{12}\rangle$ y $\langle \frac{7.2}{12}, 1\rangle$.

Analizando $f''(x) > 0$ en todo $x \in \langle -\frac{3}{4}, -\frac{5.2}{12}\rangle$ y $f''(x) < 0$ en todo $x \in \langle -\frac{5.2}{12}, 0\rangle$ entonces el par $(-\frac{5.2}{12}, f(-\frac{5.2}{12}))$ es punto de inflexión de $f(x)$.

Analizando $f''(x) < 0$ en todo $x \in \langle 0, \frac{7.2}{12}\rangle$ y $f''(x) > 0$ en todo $x \in \langle \frac{7.2}{12}, 1\rangle$ entonces el par $(\frac{7.2}{12}, f(\frac{7.2}{12}))$ es punto de inflexión de $f(x)$.

Ejemplo 2.12.3 *Hacer análisis general de extremos relativos de la función*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$$

definida en el intervalo $[-1, 3]$. *Calcular puntos críticos , puntos de inflexión y regiones crecientes y decrecientes.*

Solución:

1. Para calcular los puntos críticos de la función $f(x)$, utilizamos la regla de derivación y esto es, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$ y hagamos $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3 = 0$ resolviendo el sistema se tiene $x = -0.72$, $x = 1.38$ llamados puntos críticos de la función establecida.

2. Establecemos los intervalos abiertos, para determinar las regiones de creciente y decreciente, estos son: $\langle -1, -0.72\rangle$, $\langle -0.72, 1.38\rangle$, $\langle 1.38, 3\rangle$.

   a) Analizamos todo los puntos del intervalo $x \in \langle -1, -0.72\rangle$, si la función $f(x)$ es creciente o decreciente y utilizamos criterio de la primera derivada $f'(x) = (x - 1.38)(x + 0.72)$.
   Si $x = -0.7 \in \langle -1, -0.72\rangle$, $f'(-0.7) = (x-1.38)(x+0.72)|_{-0.7} = 0.333 > 0$

   si $x = -0.9 \in \langle -1, -0.72\rangle$, $f'(-0.9) = (x-1.38)(x+0.72)|_{-0.9} = 0.41 > 0$.

   Por consiguiente $f'(x) = (x-1.38)(x+0.72) > 0$ para todo $x \in \langle -1, -0.72\rangle$ entonces $f(x)$ es función creciente en el intervalo $\langle -1, -0.72\rangle$

   b) Analizamos si todo los puntos del intervalo $x \in \langle -0.72, 1.38\rangle$, es creciente o decreciente y por criterio de la primera derivada $f'(x) = (x-1.38)(x+0.72)$.
   Sea $x = -0.6 \in \langle -0.72, 1.38\rangle$, $f'(-0.6) = (x - 1.38)(x + 0.72)|_{-0.6} = -0.24 < 0$

Sea $x = -0.2 \in \langle -0.72, 1.38\rangle$, $f'(-0.2) = (x-1.38)(x+0.72)|_{-0.2} = -1.11 < 0$

Sea $x = 0 \in \langle -0.72, 1.38\rangle$, $f'(0) = (x-1.38)(x+0.72)|_{0} = -0.99 < 0$

Por consiguiente: $f'(x) = (x-1.38)(x+0.72) < 0$ en todo $x \in \langle -0.72, 1.38\rangle$ entonces la función $f(x)$ es decreciente.

c) Analizamos si todo los puntos del intervalo $x \in \langle 1.38, 3\rangle$, es creciente o decreciente y utilizamos criterio de la primera derivada $f'(x) = (x-1.38)(x+0.72)$.
Sea $x = 1.5 \in \langle 1.38, 3\rangle$ entonces $f'(1.5) = (x-1.38)(x+0.72)|_{1.5} = 0.26 > 0$
Sea $x = 2 \in \langle 1.38, 3\rangle$ entonces $f'(2) = (x-1.38)(x+0.72)|_{2} = 1.68 > 0$
Sea $x = 2.5 \in \langle 1.38, 3\rangle$ entonces $f'(2.5) = (x-1.38)(x+0.72)|_{2.5} = 3.60 > 0$
Por consiguiente: $f'(x) = (x-1.38)(x+0.72) > 0$. en todo $x \in \langle 1.38, 3\rangle$ entonces la función $f(x)$ es creciente.

3. Determinar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$, utilizamos el segundo criterio de la derivada para concavidad y esto, $f''(x) = 6x - 2$
Sea el punto critico $x = -0.72$, entonces evaluamos en $f''(-0.72) = (6x-2)|_{-0.72} = -6.32 < 0$ en todo intervalo I, la curva $f(x)$ es cóncava hacia abajo, entonces el par $(-0.72, f(-0.72)) = (-0.72, -0.73)$ resulta un máximo relativo de la función.
Sea el punto critico $x = 1.38$, entonces evaluamos en $f''(1.38) = (6x-2)|_{1.38} = 6.28 > 0$ en todo intervalo I, la curva $f(x)$ es cóncava hacia arriba, entonces el par $(1.38, f(1.38)) = (1.38, -5.41)$ resulta un mínimo relativo de la función.

4. Calcular el punto de inflexión de la función $f(x)$, sea $f''(x) = 6x - 2$ entonces el punto crítico es $x = 0.33$, establecemos los intervalos abiertos $\langle -0.72, 0.33\rangle$ y $\langle 0.33, 1, 38\rangle$. Utilizamos la segunda condición para punto de inflexión.

a) Sea $x \in \langle -0.72, 0.33\rangle$

Sea $x = 0 \in \langle -0.72, 0.333\rangle$ entonces $f''(0) = (6x-2)|_{0} = -2 < 0$

Sea $x = -0.5 \in \langle -0.72, 0.333\rangle$ entonces $f''(-0.5) = (6x-2)|_{-0.5} = -5 < 0$

Por consiguiente $f''(x) = 6x - 2 < 0$ para todo $x \in \langle -0.72, 0.333\rangle$

b) Sea $x \in \langle 0.33, 1.38\rangle$
Sea $x = 1 \in \langle 0.333, 1.38\rangle$ entonces $f''(1) = (6x-2)|_{0} = 4 > 0$

Sea $x = 0.5 \in \langle 0.333, 1.38\rangle$ entonces $f''(0.5) = (6x - 2)|_{0.5} = 1 > 0$

Por consiguiente $f''(x) = 6x - 2 > 0$ para todo $x \in \langle 0.333, 1.38\rangle$

c) De $(4a)$ y $(4b)$ afirmamos el par $(0.33, f(0.33)) = (0.33, -3.1)$ es punto de inflexión de la función $f(x)$.Representación gráfica:

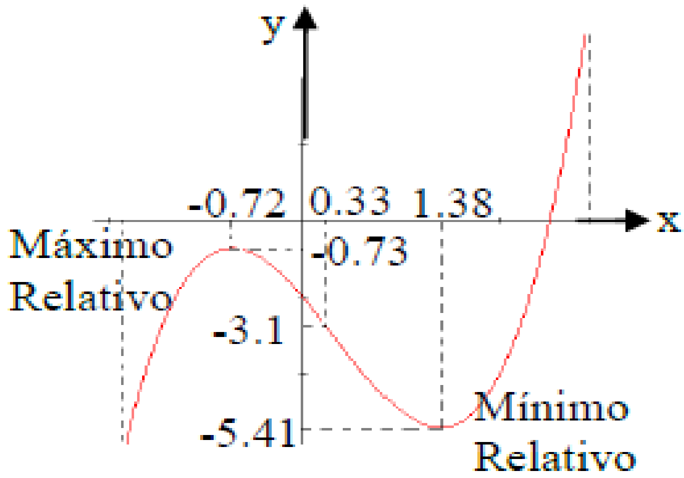


Figura 2.44: Region creciente,decreciente y puntos de inflexión

Ejemplo 2.12.4 *Dadas las funciones de costo y ingreso en linea de artefactos Made en Brasil definidos por $C(x) = x^3 - 7x^2 + 18x$ e $I(x) = 11x$, donde x representa cantidad de artefactos. Determinar el nivel de producción que maximiza la utilidad en miles reales.*

Solución:

1. Definimos función de utilidad $U(x) = I(x) - C(x) = 11x - (x^3 - 7x^2 + 18x)$ miles de reales, entonces $U(x) = -x^3 + 7x^2 - 7x$ miles de reales, establecemos que la utilidad sea máxima, si verifica $U'(x) = 0$, hagamos uso de la regla de derivación para $U'(x) = -3x^2 + 14x - 7$ miles de reales / artefactos;luego resolvemos la ecuación de segundo grado uso de fórmula de Baskara y esto es, $x = 0.56$, $x = 4.09$ miles de artefactos , ósea $x = 560$ artefactos y $x = 4090$ artefactos. Representación gráfica:

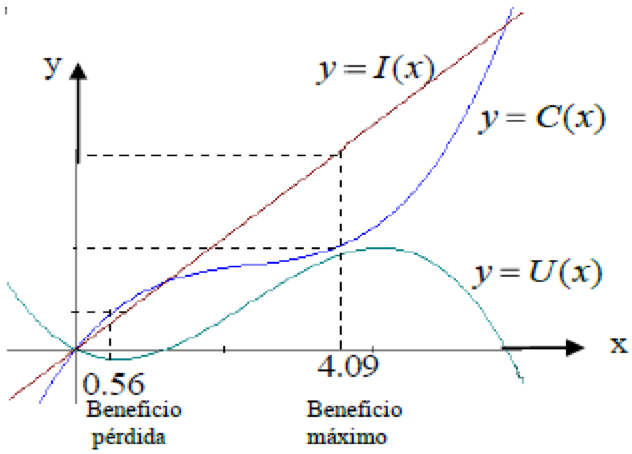


Figura 2.45: Función costo $U(x)$ máxima y punto de inflexión

2. La función de utilidad es máxima, entonces existe la segunda derivada de la función de utilidad $U''(x) = -6x + 14$ y tenemos el punto critico en $U''(x) = 0$ y resulta $x = 2.33$ miles de artefactos o $x = 2330$ artefactos.
   Para calcular los extremos relativos de la función utilidad $U(x)$ y analizamos los puntos críticos en la segunda derivada, esto es:

   a) Si $x = 0.56$ miles artefactos, $U''(0.56) = (-6x + 14)|_{0.56} = 10.14 > 0$miles de reales /artefactos2

   entonces la función de utilidad establece un mínimo relativo, $(0.56, f(0.56)) = (0.56, -4.3)$ miles ósea $(560artefactos, -4300reales)$, esto significa que hubo perdida en las utilidades, puesto que la producción de artefactos es solo 560 artefactos.

   b) Si $x = 4.09$ miles de artefactos, $U''(4.09) = (-6x + 14)|_{4.09} = -10.56 < 0$miles de reales /artefactos2

   entonces la función de utilidad establece un máximo relativo, $(4.09, f(4.09)) = (4.09, 20.1)$ miles ósea $(4090artefactos, 20100reales)$, esto significa que hubo buena ganancia o buena utilidad, puesto que la producción de artefactos fue de 20100 reales.

3. Para determinar el punto de inflexión de la función de Costos $U(x)$, establecemos los intervalos abiertos y estos son: $\langle 0.56, 2.33\rangle$ miles de artefactos, $\langle 2.33, 4.09\rangle$ miles de artefactos.

a) Si $x \in \langle 0.56, 2.33\rangle$ miles de artefactos y analizamos $U''(x) = -6x + 14$
$x = 1 \in \langle 0.56, 2.33\rangle$ entonces $U''(1) = (-6x + 14)|_1 = 8 > 0$

$x = 2 \in \langle 0.56, 2.33\rangle$ entonces $U''(2) = (-6x + 14)|_2 = 2 > 0$

Por consiguiente $f''(x) = 6x - 2 > 0$ para todo $x \in \langle 0.56, 2.33\rangle$

b) Si $x \in \langle 2.33, 4.09\rangle$ miles de artefactos y analizamos $U''(x) = -6x + 14$
$x = 3 \in \langle 2.33, 4.09\rangle$ entonces $U''(3) = (-6x + 14)|_3 = -4 < 0$

$x = 4 \in \langle 2.33, 4.09\rangle$ entonces $U''(4) = (-6x + 14)|_2 = -10 < 0$

Por consiguiente $f''(x) = 6x - 2 < 0$ para todo $x \in \langle 2.33, 4.09\rangle$

c) De $(3a)$ y $(3b)$ nos permite afirmar el par $(2.33, U(2.33))$ es punto de inflexión de la función $U(x)$.

Ejemplo 2.12.5 *Un fabricante de un diseño desea construir una caja abierta de base cuadrada , siendo el área total de* 108 *pies cuadrados de superficie ¿Qué dimensiones tiene la caja?*

Solución:

La caja tiene una base cuadrada entonces el área de la base será $A = x^2$, además el área total resulta $A_t = x^2 + 4xh = 180$ entonces la altura arbitraria de la caja es $h = \dfrac{108 - x^2}{4}$

El volumen arbitrario de la caja es $V = x^2 h = x^2.\dfrac{108 - x^2}{4} = \dfrac{108x^2 - x^4}{4}$

utilizamos reglas de derivación y sea máximo el volumen de la caja:

La derivada del volumen de la caja respecto a una de sus componentes x, resulta.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{216x - 4x^3}{4}$$

como el volumen es máximo entonces $V'(x) = 0$ resolviendo la ecuación cúbica se tiene:

$54x - x^3 = 0$ entonces $x = 0$, $x = \sqrt{54} = 7.35$ pies, representa el lado de la caja , mientras la altura será:

$h = \dfrac{108 - x^2}{4}$ entonces $h(7.35) = \dfrac{108 - (7.52)^2}{4} = 13.49$pies

Por consiguiente el volumen de la caja es: $V = (7.35)^2.(13.48) = 728$ pies cúbicas. De la gráfica tenemos las variable x que representa el lado de la caja y la variable altura sea h.

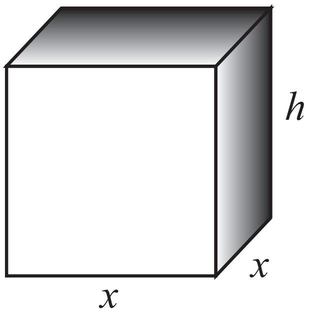


Figura 2.46: Construcción de caja abierta

Ejemplo 2.12.6 *Halle el punto crítico de la función* $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$ *en* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *y gráfica de la función.*

Solución:

Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ además de los puntos críticos:
Sea la función real $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$

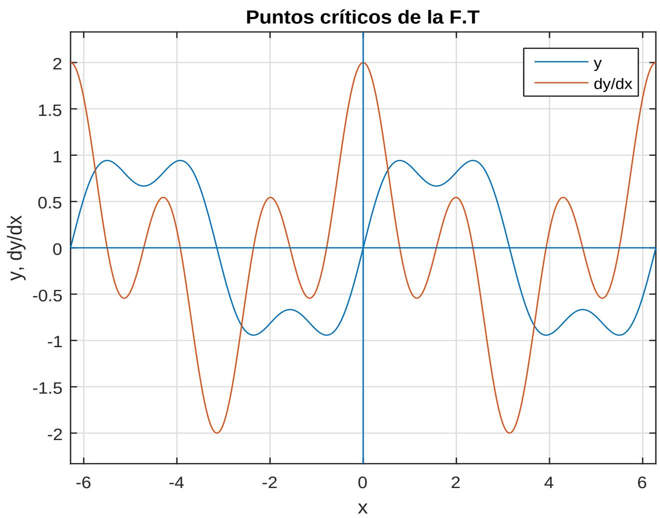


Figura 2.47: Puntos críticos de la función $f'(x) = 0$

Uso de las reglas de derivación de funciones trigonométricas: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$f'(x) = \cos(x) + \cos(3x) = \cos x - 3\cos x + 4\cos^3 x$

entonces para calcular el punto crítico sea $f'(x) = 0$

$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$ entoncescos $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.
Luego resulta $x = \pm\pi/4$, llamados puntos críticos de la función $f(x)$

Ejemplo 2.12.7 *Halle los extremos relativos de la función definida*

$$f(x) = -8\arctan(x) + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x$$

ésta curva de función representa el desplazamiento de un caballo en el fundo de la familia Rios, en la ciudad de Puerto Maldonado region de Madre de Dios.

Solución:

1. Para calcular los puntos críticos de la función de desplazamiento del caballo, para ello usamos las reglas de derivación de función potencia y función inversa de tangente para realizar consideramos la primera derivada es igual a cero, esto es, $f'(x)$=0
   $f'(x) = \dfrac{-8}{x^2+1} + x^4 + 2x^2 + 1$, resolviendo la ecuación de cuarto grado tenemos.
   $$f'(x) = \frac{-8}{x^2+1} + x^4 + 2x^2 + 1 = \frac{-8 + (x^2+1)^3}{x^2+1} = 0$$
   a partir de esta expresión se obtienen los puntos críticos singulares o no singulares, luego determinar los extremos relativos de la función definida en $x = \pm 1$ llamado punto críticos de la función.

2. Para hallar los extremos relativos de la función $f(x)$, usamos el segundo criterio de la derivada y esto es:
   $$f'(x) = \frac{-8 + (x^2+1)^3}{x^2+1} \text{ entonces } f''(x) = \frac{2x[2(x^2+1)^2 + 8]}{(x^2+1)}$$
   Analizamos para $x = -1$ entones $f''(-1) = \dfrac{2x[2(x^2+1)^2 + 8]}{(x^2+1)}|_{-1} = -8 < 0$
   podemos afirmar el par $(-1, f(-1))$ es un máximo relativo de la función polinomial y función inversa de tangente , esto quiere decir el caballo alcanza la

altura máxima de la montaña en el fundo de la familia Ríos y evaluando resulta $(-1, f(-1)) = (-1, 4.41)$, esto implica, que el caballo sube la montaña y al mismo tiempo baja la montaña el caballo.Analizamos la función de la segunda cderivada para $x = 1$.

$$f''(1) = \frac{2x[2(x^2+1)^2+8]}{(x^2+1)}|_1 = 8 > 0$$

Podemos afirmar el par $(1, f(1))$ es un mínimo relativo de la función. Representación gráfica de la función polinomial y función inversa tangente de desplazamiento del caballo en la montaña, del fundo de la familia Rios.

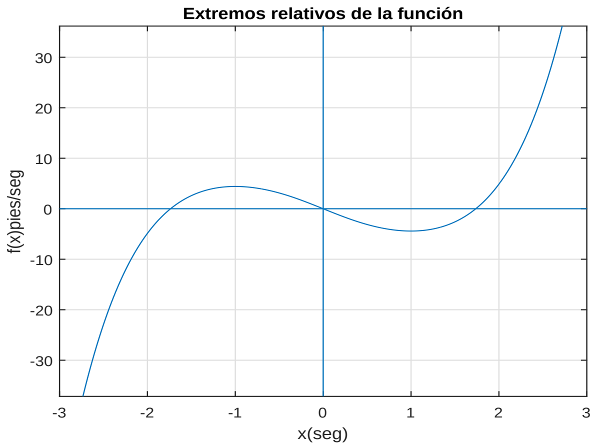


Figura 2.48: Extremos relativos de la función $f(x)$

2.12.1. Ejercicios propuestos

1. Determine los valores de extremos relativos y punto de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 2x^3$

2. Halle los valores de a, b, c y d de modo que la función real satisfaga la condiciones dadas:

   a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(1, 3)$ y un mínimo relativo en el $(-2, -3)$

   b) $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ tenga un extremo relativo en $(0, 4)$ y un punto inflexión en el $(2, -3)$

3. Determine los valores máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión y regiones crecientes o decrecientes de las funciones polinomiales:

   a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ y representación gráfica de la función polinomial definida de quinto grado:

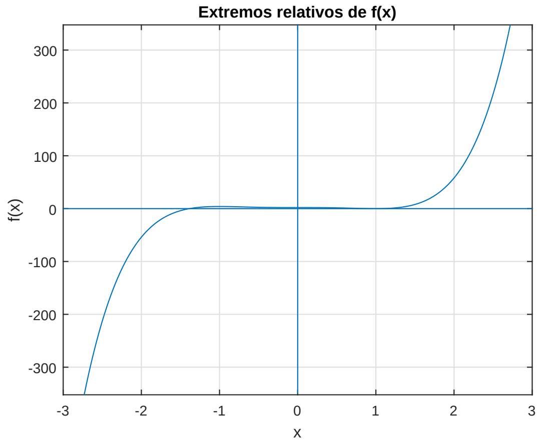


Figura 2.49: Puntos críticos de la función $f'(x) = 0$

   b) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$ y representación gráfica de la función polinomial definida en cuarto grado:

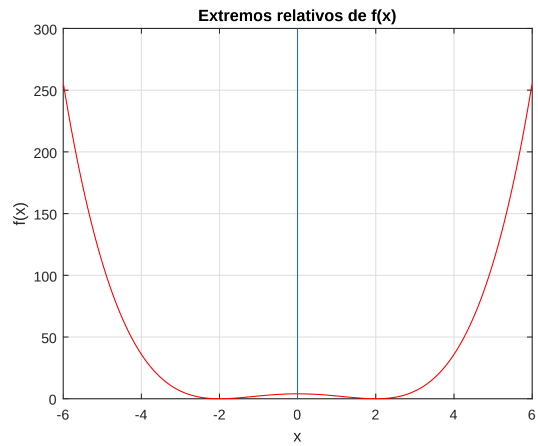


Figura 2.50: Puntos críticos de la función $f'(x) = 0$

4. Hacer un análisis general de la función $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{x^2 - 3x - 4}$ definida en el intervalo $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$. Calcular puntos críticos, regiones crecientes o decrecientes y los vales de extremos relativos.

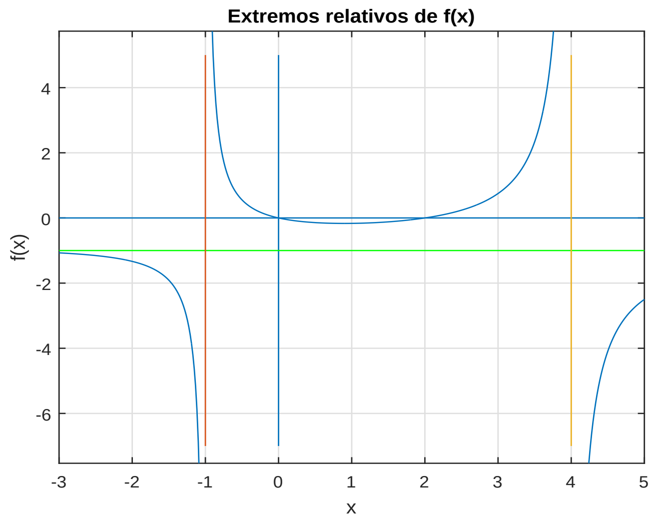


Figura 2.51: Puntos críticos de la función $f'(x) = 0$

5. Una empresa exportadora maximiza su utilidad de producción cuya de función de costo es $C(x) = 1000 + 28x - 0.001x^2 + 0.002x^3$ miles de dólares y la función de precio es $P(x) = 90 - 0.02x$ millones de dólares . Determine el nivel de producción que maximiza la función de utilidad $U(x)$.

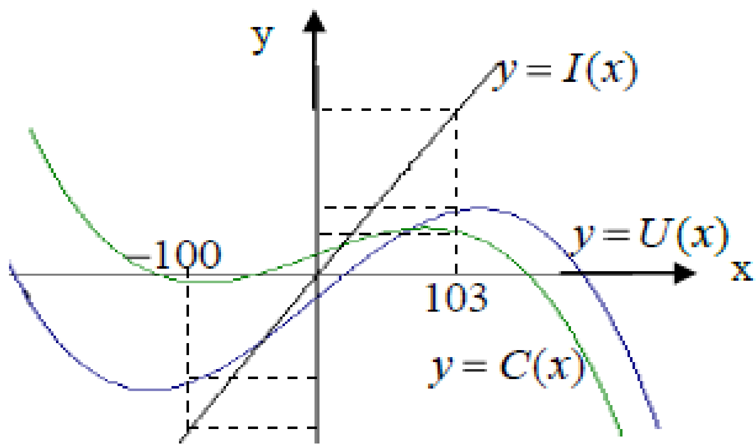


Figura 2.52: Puntos críticos de la función $f'(x) = 0$

6. Durante el periodo de 20 años entre 1975 y 1995 , la mayoría depredadores en la ciudad de Puerto Maldonado fueron exterminados por los cazadores furtivos, esto permitió la población de venados crecieran muy rápidamente hasta que una epidemia de peste causó una bajo muy significativa entre los años de 1975 y 2005 se lleva una encuesta de la cantidad de venados existen y se modela matemáticamente por $V(t) = \dfrac{1}{16}.(-t^5 + 25t^4 + 6400)$ venados. En que año fue maxima la población de venados y cuál fue esta.

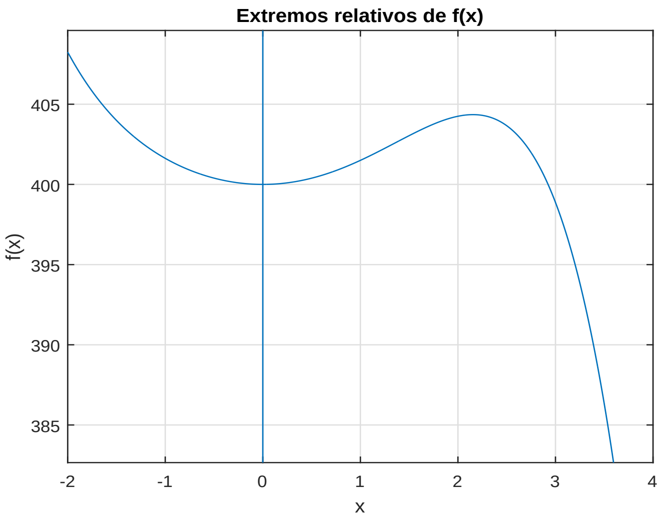


Figura 2.53: Puntos críticos de la función $f'(x) = 0$

7. $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un extremo relativo en $(0, 5)$ y un punto inflexión en el $(3, 4)$

8. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ halle los extremos relativos y un punto inflexión además la representación gráfica.

9. $f(x) = x^4 - 8x$ halle los extremos relativos y un punto inflexión además la representación gráfica.

Capítulo 3

Integral indefinida y aplicaciones

3.1. Introducción

La integración y la derivación están íntimamente relacionadas, son procedimientos de operación inversa; la integral indefinida establece una familia de funciones originales posibles, a partir de su derivada de una función, éstas se denominan funciones antiderivadas. La naturaleza de esta relación es una de las ideas más importantes en las matemáticas avanzadas como resultado del descubrimiento y estudio de los grandes matemáticos: Isaac Barrow(1669), Gottfried Leibniz(1672), y otros quienes aportaron en el desarrollo del calculo diferencial e integral y aplicaciones al contexto real y cálculo de áreas figuras geométricas conocidas o no necesariamente, es mas su aplicación a la sociología, antropología, psicología, física y ciencias biológicas, resultandos claves en la interpretación de modelos matematicos [4].
La integración es un concepto fundamental del cálculo integral,básicamente, es una generalización de la suma de pequeñas áreas infinitesimales. El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general; se utiliza principalmente para el longitud de arco, cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. La integral indefinida es una función real o constituye una familia de funciones, es decir en el proceso de integración no se le ha considerando los limites de integración, como consecuencia se logra obtener una gama de resultados de funciones de naturaleza como: algebraicas, polinomiales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales etc,, pero como una familia de funciones a partir de estos, podemos construir curvas de nivel en el plano, además se debe tener

las tablas de integrales indefinidas para resultados de problemas aplicados a la física, economía, biología, matemática pura, ingeniería etc, [23].

3.2. Integrales indefinidas

Definición 3.1 *Sea una función* $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *tal que* $F(x)$ *se llama función primitiva de* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *donde* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \langle a, b\rangle$ *y se expresa matemáticamente:* $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ *para todo* $x \in \langle a, b\rangle$.

Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$; el conjunto de las infinitas primitivas que está expresado, como una familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer grado, y la especificación del punto (x_0, y_0) se conoce como condición inicial de la ecuación diferencial y nos da una solución particular.

$f(x)$	:	Se denomina función integrable
dx	:	Variable de integración
C	:	Constante de integración
$\int$	:	Signo integral

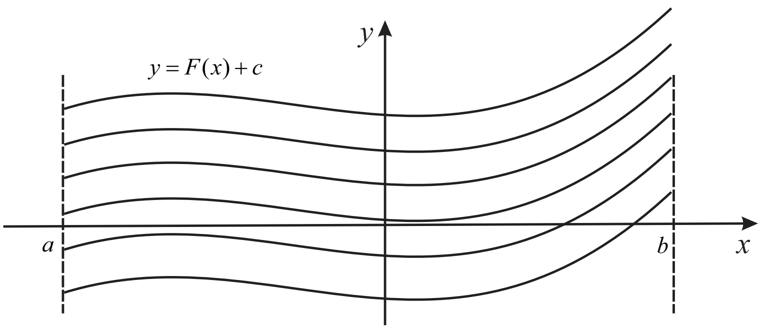


Figura 3.1: Familia de curvas en $[a, b]$

La derivación y la integración de una función son procedimientos inversos del cálculo diferencial e integral, tienen numerosas aplicaciones en las áreas de Física, Ingenierías, Administración, Economía, Biología, Ciencias Sociales; ahora nos limitaremos al estudio de las funciones primitivas o llamadas anti derivadas usando los métodos y técnicas de integración y para ello las funciones $f(x)$ son continuas en el

intervalo de definición e integrables, por consiguiente la solución general establece una familia de soluciones o curvas o niveles de curva en el plano.
La derivada es la inversa de la integración: $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = F'(x)$
la integración es la inversa de la derivación: $\int f(x)dx = F(x) + C$, [4], [21].

3.3. Propiedades fundamentales de integrales indefinidas

3.3.1. Propiedades de linealidad

Sean las funciones $u = f(x)$, $v = g(x)$ funciones derivables e integrables definidas en un intervalo abierto, cerrado o en toda la recta real, [5].

1. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + c$

2. $\int [kf(x)]\, dx = k \int f(x)dx + c$, donde c es una constante real

3. $\int df(x) = f(x) + c$

3.3.2. Primer grupo de fórmulas de integración

Desde que la derivación y la integración son operaciones inversas, las integraciones se llevan a cabo invirtiendo las correspondientes fórmulas de derivación, razón por lo cual se llaman las fórmulas resultantes o integrales Inmediatas. Sea una función integrable $u = f(x)$ y su respectiva diferencial $du = f'(x)dx$ entonces verifica las siguientes propiedades, [4], [16].

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
3. $\int du = u + c$
4. $\int e^u du = e^u + c$

Ejemplo 3.3.1 *Dada la función derivable $F'(x) = 3x^2 - 4x$, con la condición inicial $F(2) = -3$. Halle la familia de curvas soluciones y represente la gráfica de las curvas.*

Solución:

Si $F'(x) = 3x^2 - 4x$ utilizando la propiedad de integral inmediata resulta $F(x) = \int (3x^2 - 4x)dx = 3\int x^2dx - 4\int xdx = x^3 - 2x^2 + c$ denominada familia de curvas solución. Ahora la constante es, $f(2) = (x^3 - 2x^2 + c)|_2$ entonces resulta $c = -3$, por consiguiente la función primitiva es $F(x) = x^3 - 3x^2 - 3$

Gráfica de la familia de curvas integrales:

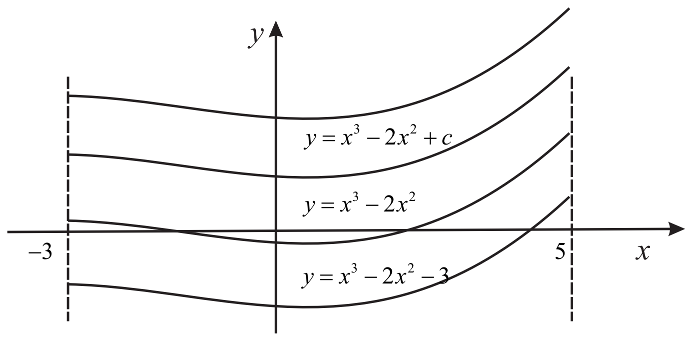


Figura 3.2: Familia de curvas en $[-3, 5]$

Ejemplo 3.3.2 *Halle la integral indefinida de* $y(x) = \int [x^2.(x^3{+}16)^3{+}\dfrac{2x-5}{x^2-5x+7}]dx$

Solución:

Hacemos cambio de variable $u = (x^3 + 16)$ entonces su diferencial es $du = 3x^2dx$ o $\dfrac{du}{3} = x^2dx$, similar hacemos cambio de $v = x^2 - 5x + 7$ entonces su diferencial es $dv = (2x - 5)dx$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int [x^2(x^3+16)^3 + \frac{2x-5}{x^2-5x+7}]dx = \int x^2(x^3+16)dx + \int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx \\ y(x) &= \int u^3\frac{du}{3} + \int \frac{dv}{v} = \frac{u^4}{12} + \ln(v) \\ y(x) &= \frac{(x^3+16)^4}{12} + \ln(x^2-5x+7) + c \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.3 *Halle la solución general de* $y'(x) = 6x + 2$ *definida en un intervalo* $[-3, 5]$ *y considere las constante de integración* $c_1 = -5$, $c_2 = 3$, $c_3 = 0$ *y* $c_4 = 8$, *además grafique dichas funciones.*

Solución:

Si $y' = 6x + 2$, utilizando propiedades de integral indefinida inmediatas resulta:

$$y(x) = \int (6x + 2)dx = \int 6xdx + \int 2dx = 3x^2 + 2x + C$$

, esta la solución general contenido en el intervalo $[-3, 5]$

Ahora las soluciones particulares de las funciones soluciones en el intervalo $[-3, 5]$

Si $c = 0$ entonces la curva pasa por el origen $y = 3x^2 + 2x$

Si $c = 3$ entonces la curva es $y = 3x^2 + 2x + 3$

Si $c = -5$ entonces la curva pasa por el origen $y = 3x^2 + 2x - 5$

Si $c = 8$ entonces la curva pasa por el origen $y = 3x^2 + 2x + 8$

Tenemos la representación gráfica.

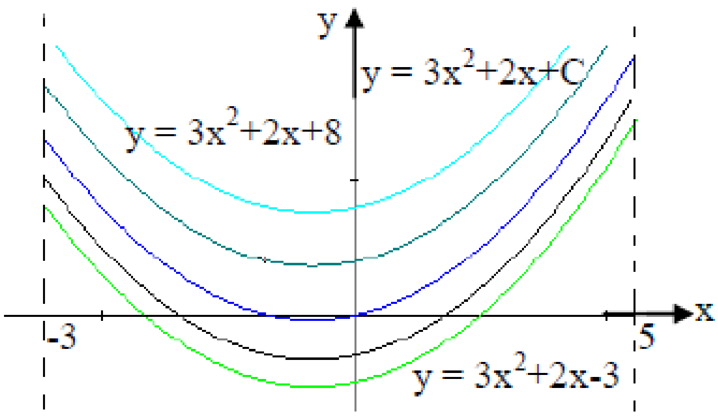


Figura 3.3: Familia de curvas en $[a, b]$

Ejemplo 3.3.4 *Halle la integral indefinida* $I = \int (\sqrt{1 + \frac{1}{2x}})x^{-3}dx$

Solución:

Hagamos cambio de variable de $u = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$ entonces elevando al cuadrado y ordenando se tiene:

$8(u^2 - 1) = x^{-3}$ y su diferencial es $\dfrac{udu}{u^2 - 1} = dx$ reemplazando se tiene:

$$\int (\sqrt{1 + \frac{1}{2x}})x^{-3}dx = 8\int u^2(u^2 - 1)du = 8\int (u^4 - u^2)du$$

$$
\begin{aligned}
I &= -8\int u^4du + 8\int u^2du = -\frac{8u^5}{5} + \frac{8u^3}{3} + c \text{ reemplazando se tiene:}\\
I &= -\frac{8(1+\frac{1}{2x})^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8(1+\frac{1}{2x})^{\frac{3}{2}}}{3} + c
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.3.5 *Halle la integral indefinida de* $I = \int \frac{3x^3}{x^2-9}dx$

Solución:

La función fraccionaria impropio integrable dividamos y resulta

$$\frac{x^3}{x^2-9} = x + \frac{9x}{x^2-9}$$

realizando la propiedad de integral inmediata se tiene:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{3x^3}{x^2-9}dx = \int (x + \frac{9x}{x^2-9})dx = \int xdx + 9\int \frac{9x}{x^2-9}dx\\
&= \int xdx + 9.\int \frac{9x}{x^2-9}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\int \frac{du}{u}\\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\ln(u) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\ln(x^2-9) + c
\end{aligned}
$$

Representación gráfico de la familia de curvas:

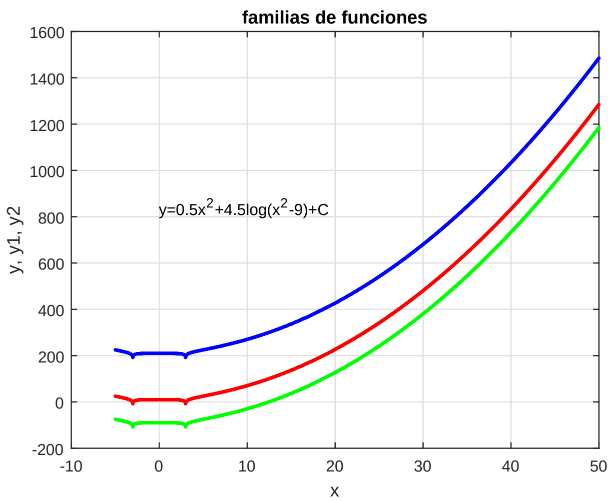


Figura 3.4: Familia de curvas en $[-10, 50]$

Ejemplo 3.3.6 *Halle la integral indefinida de* $I = \int \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 2}{x^3 - 4x} dx$

Solución:

La función integral es impropia y hagamos la division euclidiana y se tiene:

$$f(x) = x - 3 + \frac{8x^2 - 6x - 2}{x^3 - 4x}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 2}{x^3 - 4x} dx \\
&= \int (x-3)dx + \int \frac{8x^2 - 6x - 2}{x^3 - 4x} dx \text{ uso de fracciones parciales para el segundo término.} \\
&= \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{8x^2 - 6x - 2}{x(x-2)(x+2)} dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 3x + \int [\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}] dx \text{ Resolviendo la ecuación se tiene:}
\end{aligned}$$

$A(x^2 - 4) + Bx(x+2) + Cx(x-2) = 8x^2 - 6x - 2$ entonces $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{21}{4}$ y $C = \frac{9}{4}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2} - 3x + \int [\frac{1}{2x} + \frac{21}{4(x-2)} + \frac{9}{4(x+2)}] dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{1}{2x} dx + \int \frac{21}{4(x-2)} dx + \int \frac{9}{4(x+2)} dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{\ln(x)}{2} + \frac{21\ln(x-2)}{4} + \frac{9\ln(x+2)}{4} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.7 *Halle la integral indefinida* $I = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx = \int [e^x - \frac{2e^x}{e^x + 2}] dx \\
&= \int e^x dx - 2 \int \frac{e^x}{e^x + 2} dx \\
&= e^x - 2\ln(e^x + 2) + c
\end{aligned}$$

Representación de familia de curvas integrales.

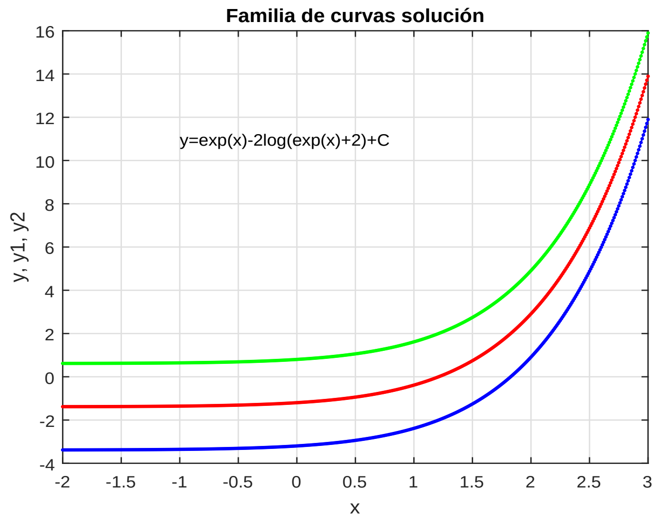


Figura 3.5: Familia de curvas en $[-23]$

3.3.3. Ejercicios propuestos

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{(3-x)^{3/2}}dx = -12(3-x)^{-1/2} + 12(3-x)^{1/2} + \frac{2(3-x)^{3/2}}{3} + c$

2. $\displaystyle\int (x+4)^2\sqrt{x-2}dx = \frac{(x-2)^{7/2}}{7} + \frac{24(x-2)^{5/2}}{5} + 24(x-2)^{3/2} + c$

3. $\displaystyle\int (x^3+8)^{3/4}x^5dx = \frac{4(x^3+8)^{11/4}}{33} + \frac{32(x^3+8)^{7/4}}{21} + c$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2-5x-1}{x^2-2x+1}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x-1} + c$

5. $\displaystyle\int \frac{5+\ln^2 x}{x(3-\ln x)}dx = -\frac{\ln^2 x}{2} - 3\ln x + 4\ln(\ln x - 3) + c$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{3x^3-11x^2-12x-4}dx = \frac{3}{4}\ln(x-2) - \frac{5}{12}\ln(x-\frac{2}{3}) + c$

7. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{2x^2-4x+3}dx = \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{5\ln(x^2-4x+3)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(\frac{2x-2}{\sqrt{2}}) + c$

8. $\displaystyle\int (e^{3x+1} + \frac{10e^{3x}}{5+e^{ex}})dx = \frac{e^{x+1}}{3} + \frac{10\ln(5+e^{3x})}{3} + c$

3.3.4. Segundo grupo de fórmulas de integración

Sea una función $u = f(x)$ derivable e integrable en un intervalo abierto o en toda la recta real y su diferencial es $du = f'(x)dx$ entonces verifica las siguientes propiedades, [4], [13]:

1. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + c$
2. $\displaystyle\int e^u du = \frac{a^u}{\ln(e)} + c = e^u + c$

3.3.5. Tercer grupo de fórmulas de integración

Sea una función $u = f(x)$ derivable e integrable en un intervalo abierto o en toda la recta real y su diferencial es $du = f'(x)dx$ entonces verifica las siguientes propiedades, [4], [13]:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(u)du = -\cos(u) + c$
2. $\displaystyle\int \cos^2(u)du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2u)}{2} + c$
3. $\displaystyle\int \cos(u)du = \operatorname{sen}(u) + c$
4. $\displaystyle\int \sec^2(u)du = \tan(u) + c$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(u)du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2u)}{2} + c$
6. $\displaystyle\int \csc^2(u)du = -\cot(u) + c$
7. $\displaystyle\int \sec(u)\tan(u)du = \sec(u) + c$
8. $\displaystyle\int \csc(u)\cot(u)du = -\csc(u) + c$
9. $\displaystyle\int \tan(u)du = -\ln\cos(u) + c$
10. $\displaystyle\int \cot(u)du = \ln\operatorname{sen}(u) + c$
11. $\displaystyle\int \sec(u)du = \ln(\sec(u)+\tan(u))+c$
12. $\displaystyle\int \csc(u)du = \ln(\csc(u)-\cot(u))+c$
13. $\displaystyle\int \tan^2(u)du = \tan(u) - u + c$
14. $\displaystyle\int \cot^2(u)du = -\cot(u) - u + c$

Ejemplo 3.3.8 *Halle la integral* $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 3}{\cos^2 2x}dx$

Solución:

Utilizamos las propiedades de integrales de funciones trigonométricas y esto es:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 3}{\cos^2 2x}dx = \int \tan 2x \sec 2x dx + \int \sec 2x dx + 3\int \sec^2 2x dx$$

Hagamos cambio de variable $u = 2x$ entonces su diferencial es $du = 2dx$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \tan u \sec u du + \frac{1}{2}\int \sec u du + \frac{3}{2}\int \sec^2 u du \\ &= \frac{1}{2}\sec u + \frac{1}{2}\ln(\sec u + \tan u) + \frac{3}{2}\tan u + c \\ &= \frac{1}{2}\sec 2x + \frac{1}{2}\ln(\sec 2x + \tan 2x) + \frac{3}{2}\tan 2x + c \end{aligned}$$

Representación de familia de curvas integrales de funciones logarítmicas y funciones trigonométricas trascendentales, en el argumento de la variable x, definidas en un intervalo abierto contenido en la recta real.

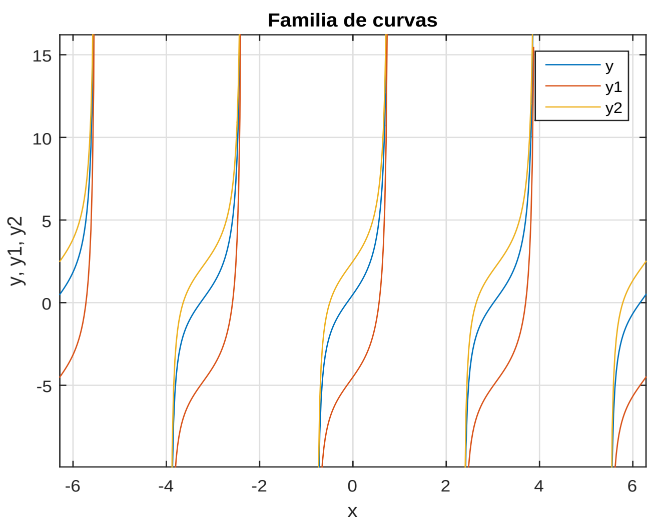


Figura 3.6: Familia de curvas solución

Ejemplo 3.3.9 *Halle la integral* $I = \displaystyle\int (\sec^2 5x + \csc^2 5x + \sec 5x)dx$

Solución:

Aplicando propiedades de integrales de funciones trigonométricas trascendentales de secante y cosecante dentro de integrales indefinidas en proceso de integración en las variables definidas de x, definidas en un intervalo abierto contenido en la recta real.

$$\begin{aligned} I &= \int (\sec^2 5x + \csc^2 5x + \sec 5x)dx = \frac{1}{5}\int (\sec^2 u + \csc^2 u + \sec u)du \\ &= \frac{1}{5}[\int (\sec^2 udu + \int \csc^2 udu + \int \sec u)du] \\ &= \frac{1}{5}\tan u - \frac{1}{5}\cot u + \frac{1}{5}\ln(\sec u + \tan u) \\ &= \frac{1}{5}\tan 5x - \frac{1}{5}\cot 5x + \frac{1}{5}\ln(\sec 5x + \tan 5x) \end{aligned}$$

Representación gráfica es una familia de curvas integrales, que describen la dinámica de evolución de ciertas situaciones del contexto real, definidas en un intervalo abierto contenido en la recta real:

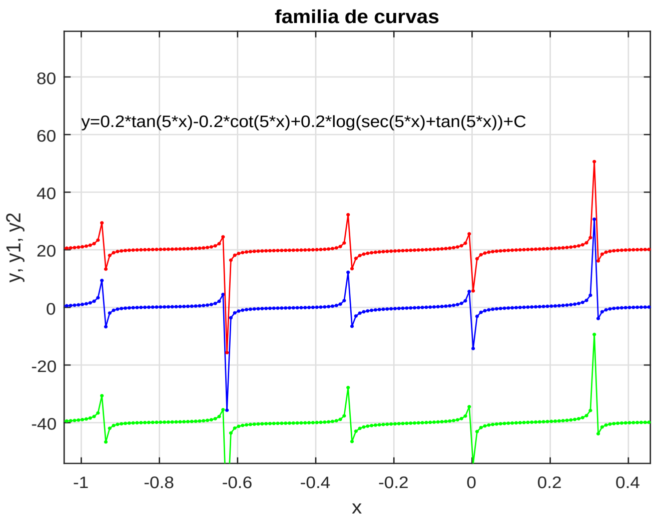


Figura 3.7: Familia de curvas solución

Ejemplo 3.3.10 *Halle la integral indefinida* $I = \int \operatorname{sen} 2x \cos 4x dx$

Solución:

Aplicando propiedades de integrales para el producto de funciones trigonométricas trascendentales de seno y coseno en los argumentos establecidos y utilizando las propiedades de transformación a suma de funciones trigonométricas.Representación la gráfica de curvas integrales, dadas en términos de funciones trigonométricas trascendentales Figura 3.8.

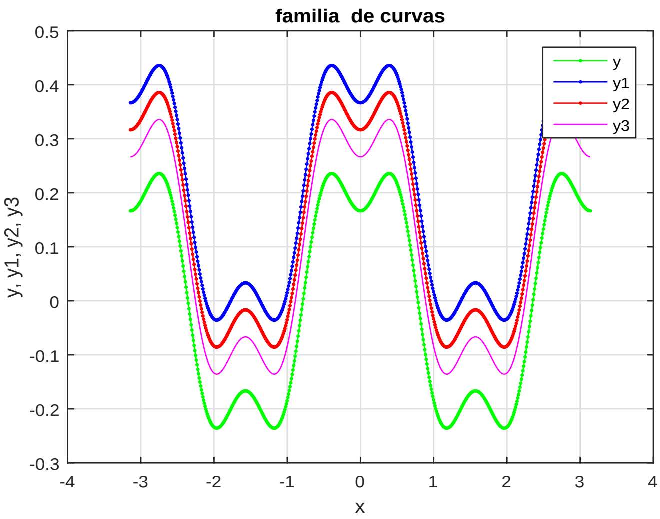


Figura 3.8: Familia de curvas solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen} 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \cos 2u du \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u(\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u) du \\
I &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \cos^2 u du - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^3 u du
\end{aligned}$$

Sabemos que $\operatorname{sen} 3u = 3\operatorname{sen} u - 4\operatorname{sen}^3 u$ entonces $\operatorname{sen}^3 u = \dfrac{3\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} 3u}{4}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \cos^2 u du - \frac{1}{2}\int \frac{3\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} 3u}{4} du \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \cos^2 u du - \frac{3}{8}\int 3\operatorname{sen} u du - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen} 3u du
\end{aligned}$$

Sea $z = \cos u$ entonces $du = -\operatorname{sen} z dz$ además $y = 3u$ entonces $dy = 3dz$

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}\int z^2 dz + \frac{3}{8}\int \operatorname{sen} u du - \frac{1}{24}\int \operatorname{sen} y dy \\
&= -\frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{8}\cos u - \frac{1}{24}\cos y + c \\
&= -\frac{1}{6}\cos^3 2x + \frac{3}{8}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 6x + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.11 *Halle la integral indefinida* $I = \displaystyle\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 2}{e^{2x} + 1} dx$

Solución:

Hacemos cambio de variable $e^{2x} + 1 = u$ entonces $e^{2x} = u - 1$ y su diferencial es $\dfrac{du}{2(u-1)} = dx$, y utilizando las propiedades de integración de funciones exponenciales, la representación gráfica.

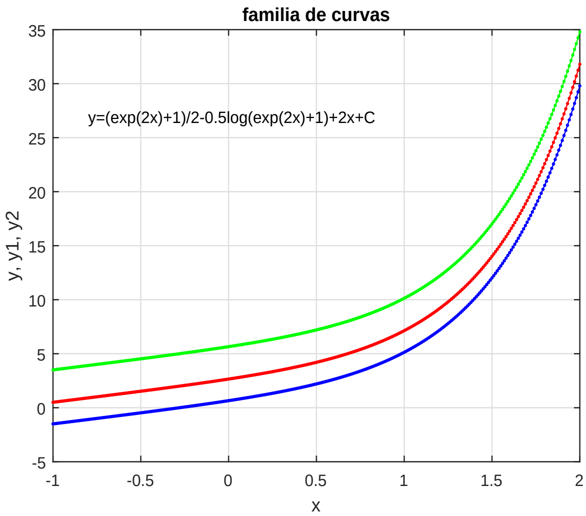


Figura 3.9: Familia de curvas solución en[-1, 2]

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \frac{u^2 - 2u + 1 + 2u - 2 + 2}{u(u-1)} du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{u^2 + 1}{u(u-1)} du \text{ uso de fracciones parciales se tiene:} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{u^2 + 1}{u(u-1)} du = \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u-1} \\
&= \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u-1} = \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\ln u + \ln(u-1) + c \\
&= \frac{u}{2} - \frac{1}{2} ln(u) + \ln(u-1) + c = \frac{e^{2x}+1}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln(e^{2x}+) + c \\
&= \frac{e^{2x}+1}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + 2x + c
\end{aligned}$$

3.3.6. Cuarto grupo de fórmulas de integración

Sea una función $u = f(x)$ derivable e integrable en un intervalo abierto o en toda la recta real y su diferencial es $du = f'(x)dx$ entonces verifica las siguientes propiedades, [13], [4], [21]:

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen}(\frac{u}{a}) + c$
2. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{u}{a}) + c$
3. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln(\frac{u-a}{u+a}) + c$
4. $\int \frac{du}{u(\sqrt{u^2 - a^2})} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}(\frac{u}{a}) + c$
5. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln(\frac{u+a}{a-u}) + c$
6. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + c$
7. $\int \frac{du}{u(\sqrt{a^2 + u^2})} = -\frac{1}{a}\ln\frac{u + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} + c$
8. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\operatorname{arc\,cos}(\frac{u}{a}) + c$
9. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = -\arctan(\frac{u}{a}) + c$
10. $\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + \operatorname{arc\,cos}\frac{u}{a} = \pi/2$
11. $\arctan\frac{u}{a} + \operatorname{arccot}\frac{u}{a} = \pi/2$
12. $\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + \operatorname{arccsc}\frac{u}{a} = \pi/2$

Ejemplo 3.3.12 *Halle la integral indefinida* $I = \int \frac{6dx}{x^2 + 4x + 13}$

Solución:

$I = \int \frac{6}{x^2 + 4x + 13}dx = \int \frac{6dx}{(x+2)^2 + 9}$

hacemos cambio de variable $u = x + 2$ y su diferencial es $du = dx$

$I = 6\int \frac{6du}{u^2 + 3^2} = 6(\frac{1}{3}\arctan(u) + c = 2\arctan(\frac{x+2}{3}) + c$

$I = 2\arctan(\frac{x+2}{3}) + c$

Ejemplo 3.3.13 *Halle la integral indefinida* $I = \int \frac{(x+3)^3 + 5}{\sqrt{9 - (x+3)^2}}dx$

Solución:

Sea $u = x + 3$, cuya diferencial es $du = dx$ y $x = u - 3$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+3)^3 + 5}{\sqrt{9 - (x+3)^2}}dx = \int \frac{u^3 + 5}{\sqrt{9 - u^2}}du \\ &= \int \frac{u^3 du}{\sqrt{9 - u^2}} + \int \frac{5du}{\sqrt{9 - u^2}} \end{aligned}$$

Hacemos cambio de variable $z = 9 - u^2$ entonces $2udu = -dz$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{9-z}{\sqrt{z}}dz + \int \frac{5du}{\sqrt{3^2 - u^2}} \\
&= -\frac{9}{2}z^{-1/2}dz + \frac{1}{2}\int z^{1/2}dz + \int \frac{5du}{\sqrt{3^2-u^2}} \\
&= -\frac{9}{2}z^{-1/2}dz + \frac{1}{2}\int z^{1/2}dz + \int \frac{5du}{\sqrt{3^2-u^2}} \\
&= 9z^{1/2} + \frac{1}{3}z^{3/2} + \frac{5}{3}\operatorname{arc\,sen}(\frac{u}{3}) + c \\
&= 9(9-u^2)^{1/2} + \frac{1}{3}(9-u^2)^{3/2} + \frac{5}{3}\operatorname{arc\,sen}(\frac{u}{3}) + c \\
&= 9(9-(x+3)^2)^{1/2} + \frac{1}{3}(9-(x+3)^2)^{3/2} + \frac{5}{3}\operatorname{arc\,sen}(\frac{x+3}{3}) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.14 *Halle la integral indefinida* $I = \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x^2-4x+8}dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x^2-4x+8}dx = \int [x+5+\frac{15(x-3)}{x^2-4x+8}]dx \\
&= \int (x+5)dx + \frac{15}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 15\int \frac{dx}{x^2-4x+8} \\
&= \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{15}{2}\ln(x^2-4x+8) - \frac{15}{2}\arctan(\frac{x-2}{2}) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.15 *Halle la integral indefinida*

$$I = \int \frac{5x^3}{2x^2-4x+3}dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{5x^3}{2x^2-4x+3}dx = 5\int [\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\frac{5}{2}x - 3}{2x^2-4x+3}]dx \\
&= \frac{1}{2}\int xdx + 5\int dx + \frac{25}{2}\int \frac{x-1}{2x^2-4x+3}dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{2x^2-4x+3} \\
&= \frac{5x^2}{4} + 5\int dx + \frac{25}{2}\int \frac{x-1}{2x^2-4x+3}dx + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1/2} \\
&= \frac{5x^2}{4} + 5x + \frac{25}{8}ln(2x^2-4x+3) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}(x-1)) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.16 *Calcule la integral* $I = \displaystyle\int \frac{3x^4 + 11x^3 - 13x^2 - 91x - 127}{x^5 + x^4 - 101x^3 - 19x^2 + 9x + 90}dx$

Solución:
Descomponer en factores primos el polinomio el denominador y resulta:

$x^5 + x^4 - 101x^3 - 19x^2 + 9x + 90 = (x-2)(x^2-9)(x^2+3x+5)$, para el proceso de integración utilizaremos fracciones parciales de tipo cuadrática.

$$\frac{3x^4 + 11x^3 - 13x^2 - 91x - 127}{x^5 + x^4 - 101x^3 - 19x^2 + 9x + 90} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-9} + \frac{Dx+E}{x^2+3x+5}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta los valores de $A = 3$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 2$ y $E = -1$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x^2-9} + \frac{2x-1}{x^2+3x+5}dx \\
I &= \int \frac{3}{x-2}dx + \int \frac{1}{x^2-9}dx + \int \frac{2x-1}{x^2+3x+5}dx \text{ por integración inmediatas se tiene:} \\
I &= 3\ln(x-2) + \frac{1}{6}\ln(\frac{x-3}{x+3}) + \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx - \int \frac{4}{x^2+3x+5}dx \\
I &= 3\ln(x-2) + \frac{1}{6}\ln(\frac{x-3}{x+3}) + \ln(x^2+3x+5) - \frac{8}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{6x+9}{2\sqrt{11}}) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.17 *Halle la integral indefinida* $I = \displaystyle\int \frac{6x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

Solución:
$I = \displaystyle\int \frac{6x-5}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int \frac{6x+5}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx$
Hacemos cambio de variable $u = x+2$, entonces du=dx, x=u-2

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{6u-7}{\sqrt{9-u^2}}du = \int \frac{6udu}{\sqrt{9-u^2}} - \int \frac{7du}{\sqrt{9-u^2}} \\
&= -3\int \frac{dz}{\sqrt{z}}dz - 7\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = -6z^{1/2} - 7\operatorname{arc\,sen}(u/3) \\
&= -6z^{1/2} - 7\operatorname{arc\,sen}(\frac{u}{3}) = -6(9-u^2)^{1/2} - 7\operatorname{arc\,sen}(\frac{x+2}{3}) \\
&= -6(9-u^2)^{1/2} - 7\operatorname{arc\,sen}(\frac{x+2}{3}) = -6(9-(x+2)^2)^{1/2} - 7\operatorname{arc\,sen}(\frac{x+2}{3}) + c
\end{aligned}$$

3.3.7. Ejercicios propuestos

Halle las integrales indefinidas, usando los grupos de fórmulas de integración:

1. $\displaystyle\int \frac{8x+5}{\sqrt{12x-4x^2-5}}dx - \sqrt{12x-4x^2-5} + 7\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{2x-3}{2}) + c$
2. $\displaystyle\int \frac{4x^3-24x^2}{x^2-4x+6}dx = 4x^2-8x-28\ln(x^2-4x+6) - \frac{28}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x-2}{\sqrt{2}}) + c$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -(\frac{x+3}{2})\sqrt{3+2x-x^2} + \mathrm{arc\,sen}(\frac{x-1}{2}) + c$
4. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{15+6x+x^2}dx = \ln(15+6x+x^2) - \frac{9}{\sqrt{6}}\arctan(\frac{x+3}{\sqrt{6}}) + c$
5. $\displaystyle\int (\sec x + \csc x)^2 dx = \tan x - \cot x + \sec x + c$
6. $\displaystyle\int \sqrt{7+6x-x^2}dx = (\frac{x-3}{8})\sqrt{7+6x-x^2} + 2\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{x-3}{4}) + c$
7. $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2}dx = (\frac{x-3}{2})\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2}\mathrm{arc\,sen}(\frac{x-3}{3}) + C$
8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{2+x^2+x^4}dx = \frac{1}{4}\ln(2+x^2+x4) - \frac{\sqrt{7}}{14}\arctan(\frac{2x^2+1}{\sqrt{7}}) + c$
9. $\displaystyle\int \sqrt{5+2x-x^2}dx = (\frac{x+1}{2})\sqrt{5+2x+x^2} + 2\ln[\frac{x-1}{2} + \sqrt{x^2+2x+5}] + c$
10. $\displaystyle\int \frac{2e^x+e^{-x}}{3e^x-4e^{-x}}dx = \frac{1}{3}\ln(3e^x-4e^{-x}) + \frac{1}{3}\ln(3-4e^{-2x}) + c$

3.4. Métodos de integración

3.4.1. Potencia de integrales de seno y coseno

1. Sean las integrales de la forma: $\displaystyle\int \mathrm{sen}^n\, u du$ o $\displaystyle\int \cos^n u du$ para todo n impar positivo , se debe sustituir :
   $\mathrm{sen}^n u = \mathrm{sen}^{2k+1}\mathrm{sen}\, u = (1-\cos^2 u)^k \mathrm{sen}\, u$ o $\cos^n u = \cos^{2k+1}\mathrm{sen}\, u = (1-\mathrm{sen}^2 u)^k \cos u$
2. Sean las integrales de la forma: $\displaystyle\int \mathrm{sen}^n\, u du$ o $\displaystyle\int \cos^n u du$ para todo n par positivo , se debe sustituir:
   $\mathrm{sen}^n u = \mathrm{sen}^{2k} u = \left(\dfrac{1-\cos 2u}{2}\right)^k$ o $\cos^n u = \cos^{2k} u = \left(\dfrac{1+\cos 2u}{2}\right)^k$

3. Sean la integrales $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u du$ donde n , m son pares o impares se sigue los procedimiento tos anteriores, [4], [12], [21].

Ejemplo 3.4.1 *Halle la integral indefinida* $\int \operatorname{sen}^7 3x dx$

Solución:

Utilizamos el primer caso , $n = 7$ es impar y se tiene:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{sen}^7 3x dx = \int (\operatorname{sen}^2 3x)^3 \operatorname{sen} 3x dx = \int (1 - \cos^2 3x)^3 \operatorname{sen} 3x dx \\
I &= \int (1 - 3\cos^2 3x + 3\cos^4 3x - \cos^6 3x) \operatorname{sen} 3x dx \\
I &= \int \operatorname{sen} 3x dx - 3 \int \cos^2 3x \operatorname{sen} 3x dx + 3 \int \cos^4(3x) \operatorname{sen} 3x dx - \int \cos^6 3x \operatorname{sen} 3x dx
\end{aligned}
$$

Sea $u = 3x$ entonces $du = 3dx$ usando las formulas de integración se tiene

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} u du - \int \cos^2 u \operatorname{sen} u du + \int \cos^4 u \operatorname{sen} u du - \frac{1}{3} \int \cos^6 u \operatorname{sen} u du (1) \\
&= \frac{1}{3} \cos u - \frac{1}{3} \cos^3 u + \frac{1}{5} \cos^4 u - \frac{1}{21} \cos^7 u + c \\
&= \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{3} \cos^3 3x + \frac{1}{5} \cos^4 3x - \frac{1}{21} \cos^7 3x + c
\end{aligned}
$$

Representación gráfica de la familia de curvas.

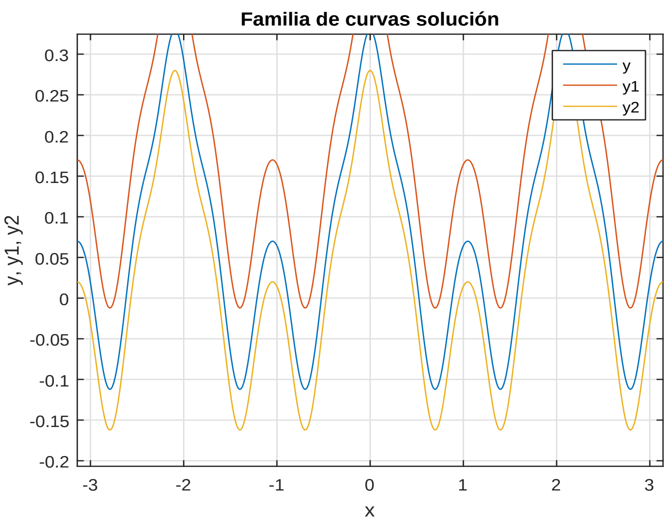


Figura 3.10: Familia de curvas solución de F.T

Ejemplo 3.4.2 *Halle la integral* $\int \cos^6 5x dx$

Solución:

Utilizamos el segundo caso, puesto que $n = 6$ es par y se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int cos^6 5x dx = \frac{1}{5}\int (\cos^2 u)^3 du = \frac{1}{5}\int (\frac{1+\cos 2u}{2})^3 du \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{1+3\cos 2u + 3\cos^2 2u + \cos^3 2u}{8} du \\ &= \frac{1}{40}[\int du + 3\int \cos 2u du + 3\int \cos^2 2u du + \int \cos^3 2u du] \\ &= \frac{u}{40} + \frac{3}{80}\operatorname{sen} 2u + \frac{3u}{80} + \frac{3}{320}\operatorname{sen} 4u + \frac{1}{40}\int (1-\operatorname{sen}^2 2u)\cos 2u du \\ &= \frac{u}{40} + \frac{3}{80}\operatorname{sen} 2u + \frac{3u}{80} + \frac{3}{320}\operatorname{sen} 4u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{80} - \frac{1}{240}\operatorname{sen}^3 2u + c \\ &= \frac{x}{20} + \frac{3}{80}\operatorname{sen} 10x + \frac{\operatorname{sen} 20x}{320} - \frac{1}{240}\operatorname{sen}^3 10x + c \end{aligned}$$

Representación gráfica de las curvas solución.

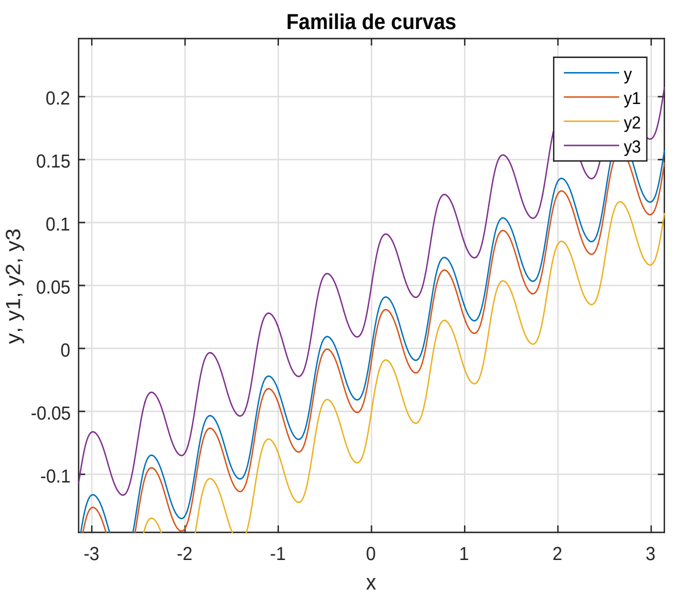


Figura 3.11: Familia de curvas solución de F.T

3.4.2. Potencia de integrales trigonométricas de tangente, secante e inversas

1. Sea la integral $\int \tan^n u du$ o $\int \cot^n u du$, n es par, según propiedades trigonométricas, se tiene $\tan^n u = \tan^{n-2} u \tan^2 u = \tan^{n-2} u(\sec^2 u - 1)$ o $\cot^n u = \cot^{n-2} u \cot^2 u = \cot^{n-2} u(\csc^2 u - 1)$

2. Sea la integral $\int \sec^n u du$ o $\int \csc^n u du$, n es par, según propiedades trigonométricas, se tiene $\sec^n u = \sec^{2k} u = \sec^{2k-2} u \sec^2 u = (1 + \tan^2 u)^{k-1} \sec^2 u$ o $\csc^n u = \csc^{2k} u = \csc^{2k-2} u \csc^2 u = (1 + \cot^2 u)^{k-1} \csc^2 u$

3. Sea la integral $\int \tan^n u \sec^m u du$ o $\int \cot^n u \csc^m u du$, n es par, se procede los dos casos anteriores, [4], [10], [21].

Ejemplo 3.4.3 *Halle la integral indefinida* $\int \tan^8 3x dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tan^8 3x dx = \frac{1}{8}\int \tan^8 u du = \frac{1}{3}\int \tan^6 u \tan^2 u du \\
&= \frac{1}{3}\int (\tan^6 u)(\sec^2 u - 1) du = \frac{1}{3}\int \tan^6 u \sec^2 u du - \frac{1}{3}\int \tan^6 u du \\
&= \frac{1}{3}\int \tan^6 u \sec^2 u du - \frac{1}{3}\int \tan^4 u(\sec^2 u - 1) du \\
&= \frac{\tan^7 u}{21} - \frac{\tan^5 u}{15} + \int \tan^2 u(\sec^2 u - 1) du \\
&= \frac{\tan^7 u}{21} - \frac{\tan^5 u}{15} + \frac{\tan^3 u}{9} - \frac{1}{3}\tan u + \frac{u}{3} + c \\
&= \frac{\tan^7 3x}{21} - \frac{\tan^5 3x}{15} + \frac{\tan^3 3x}{9} - \frac{1}{3}\tan 3x + x + c
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.4.4 *Halle la integral indefinida* $\int \sec^6 2x dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sec^6 2x dx = \int \sec^4 2x \sec^2 2x dx = \frac{1}{2}\int \sec^4 u \sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^4 u \sec^2 u du = \frac{1}{2}\int (1+\tan^2 u)^2 \sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2}\int (1+2\tan^2 u + \tan^4 u)\sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u du + \int \tan^2 u \sec^2 u du + \frac{1}{2}\int \tan^4 u)\sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2}\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{2}\int \tan^4 u \sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2}\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{10}\tan^5 u \\
&= \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{3}\tan^3 2x + \frac{1}{10}\tan^5 2x + c
\end{aligned}
$$

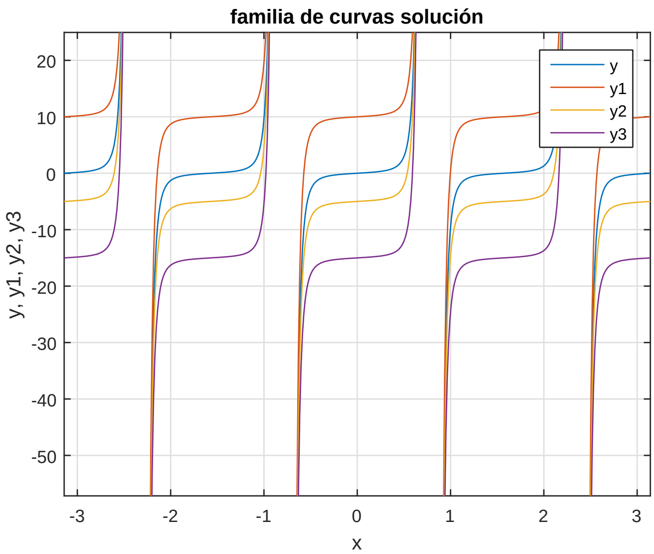


Figura 3.12: Familia de curvas solución de F.T

Las curvas integrales son una familia de trayectorias definidas en su dominio y representan la suma de funciones trigonométricas trascendentales y describen la dinámica de evolución de un fenómeno natural o artificial en el tiempo y espacio.

Ejemplo 3.4.5 *Halle la integral indefinida* $\int \operatorname{sen}^4 2x \cos^5 2x dx$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^5 3x dx = \int \operatorname{sen}^4 3x \cos^4 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^4 u \cos^4 u \cos u du$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^4 u(1-\operatorname{sen}^2 u)^2 \cos u du = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^4 u(1+2\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen}^4 u)\cos u du \\
&= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^4 u \cos u du + \frac{2}{3}\int \operatorname{sen}^6 u \cos u du + \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^8 u \cos u du \\
&= \frac{1}{15}\operatorname{sen}^5 u + \frac{2}{21}\operatorname{sen}^7 u + \frac{1}{27}\operatorname{sen}^9 u + c \\
&= \frac{1}{15}\operatorname{sen}^5 3x + \frac{2}{21}\operatorname{sen}^7 3x + \frac{1}{27}\operatorname{sen}^9 3x + c
\end{aligned}$$

Las curvas integrales son una familia de trayectorias definidas en su dominio y representan la suma de funciones trigonométricas trascendentales y describen la dinámica de evolución de un fenómeno natural o artificial en el tiempo y espacio.

Ejemplo 3.4.6 *Halle la integral indefinida* $\int \cot^5 2x \csc^7 2x dx$

Solución:

$$\int \cot^5 2x \csc^7 2x dx = \frac{1}{2}\int \cot^4 u \csc^6 u \cot u \csc u du$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int (1-\csc^2 u)^2 \csc^6 u \cot u \csc u du \\
&= \frac{1}{2}\int (1-2\csc^2 u + \csc^4 u)\csc^6 u \cot u \csc u du \\
&= \frac{1}{2}\int (\csc^6 u - 2\csc^8 u + \csc^{10} u)\cot u \csc u du \\
&= \frac{1}{2}\int \csc^6 u \csc u \cot u du - \int \csc^8 u \cot u \csc u du + \int \csc^{10} u \cot u \csc u du \\
&= \frac{1}{14}\csc^7 u - \frac{1}{9}\csc^9 u + \frac{1}{11}\csc^{11} u + c \\
&= \frac{1}{14}\csc^7 2x - \frac{1}{9}\csc^9 2x + \frac{1}{11}\csc^{11} 2x + c
\end{aligned}$$

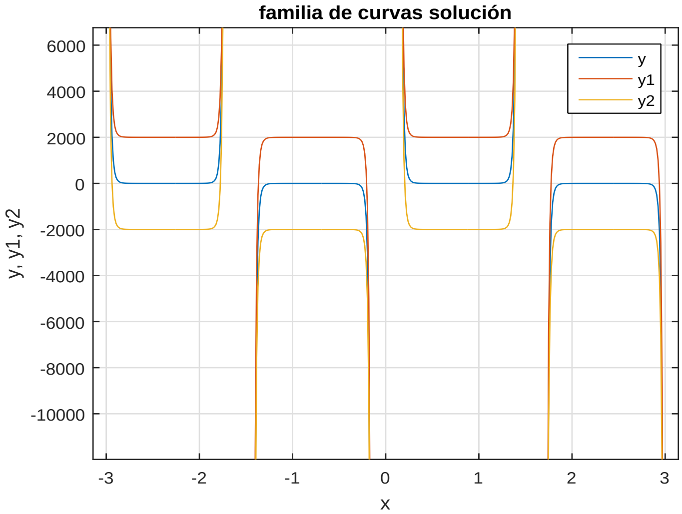


Figura 3.13: Familia de curvas solución de F.T

3.4.3. Ejercicios propuestos

Halle la integral indefinida utilizando las propiedades de integración:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 3x \cos^5 3x dx = -\frac{\cos 6x}{192} + \frac{\cos^3 6x}{208} + \frac{\cos^5 6x}{960} + c$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 3x \cos^4 3x dx = -\frac{\cos^5 3x}{15} + \frac{\cos^7 3x}{7} + \frac{\cos^9 3x}{9} + \frac{\cos^{11} 3x}{33} + c$

3. $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^{5/2} x dx = \frac{2\sec^{9/2} x}{9} + \frac{2\sec^{5/2} x}{5} + c$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + 3\operatorname{sen}^2 x \cos x}{2} dx = \operatorname{sen}^2 x + \ln(\operatorname{sen} x) + c$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{3/2} x dx = -\frac{2\cos^{5/2} x}{5} + \frac{2\sec^{9/2} x}{9} + c$

6. $\displaystyle\int [\sec 2x + \csc 2x]^2 dx = \frac{1}{2}\tan 2x - \frac{1}{2}\cot 2x + \ln[\csc 4x - \cot 4x] + c$

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 3x dx = \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} - \frac{\operatorname{sen} 11x}{22} + c$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos 3x dx = \frac{3\cos 2x}{16} - \frac{3\cos 4x}{32} + \frac{\cos 6x}{48} + c$

9. $\displaystyle\int \sec^3 3x \tan^3 3x dx = \frac{1}{15}\sec^5 3x - \frac{1}{9}\sec^3 3x + c$

10. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x/2)\cos^2(x/2)dx = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{32} - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{24} + c$

11. $\displaystyle\int \cot^5 x dx = -\frac{\csc^4 2x}{8} + \frac{\cot^2 2x}{40} + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sen} 2x) + c$

12. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \cos 3x dx = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{24} + c$

13. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 3x dx = \frac{9x}{24} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{96} + c$

14. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^4 x dx}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{3x}{2} + c$

15. $\displaystyle\int \frac{(\sec^2 x + 1)\sec^2 x}{1 + \tan^3 x} dx = 2\ln(1+\tan x) - 0.5\ln(\tan^2 x - \tan x + 1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}) + c$

16. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + 3\operatorname{sen}^2 x \cos x + x}{2} dx = -\frac{2\cos^{5/2} x}{5} + \frac{2\cos^{9/2} x}{9} + \frac{x^2}{2} + c$

3.5. Integración por sustitución trigonométrica

Es una alternativa cuando una función integrando presenta características especiales y para se utiliza las funciones trigonométricas y las propiedades y se presentan tres casos de sustitución:

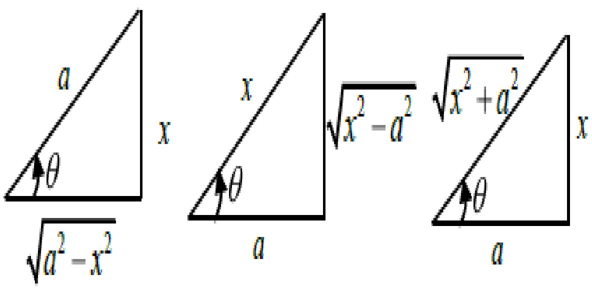


Figura 3.14: Relación de funciones trigonométricas

1. Sea $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a\operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = a\cos\theta$

2. Sea $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\tan\theta$

3. Sea $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + (a\tan\theta)^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2\theta)} = a\sec\theta$

Ejemplo 3.5.1 *Halle la integral indefinida* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$

Solución:

Sea la función trigonométrica $x = 5\tan z$ entonces su diferencial es $dx = 5\sec^2 z dz$ y reemplazando se tiene $\sqrt{5^2+x^2} = \sqrt{5^2+(a\tan z)^2} = \sqrt{5^2(1+\tan^2 z} = 5\sec z$ reemplazando estos resultados en:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{\sec^2 z dz}{25\tan^2 z\sec z}dz \\ &= \int \frac{\sec z dz}{25\tan^2 z}dz = \frac{1}{25}\int \csc z\cot z dz \\ &= \frac{1}{25}\int \csc z\cot z dz = -\frac{1}{25}\csc z + c \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+25}}{25x} + c \end{aligned}$$

Representación gráfica de la familia de curvas solución:

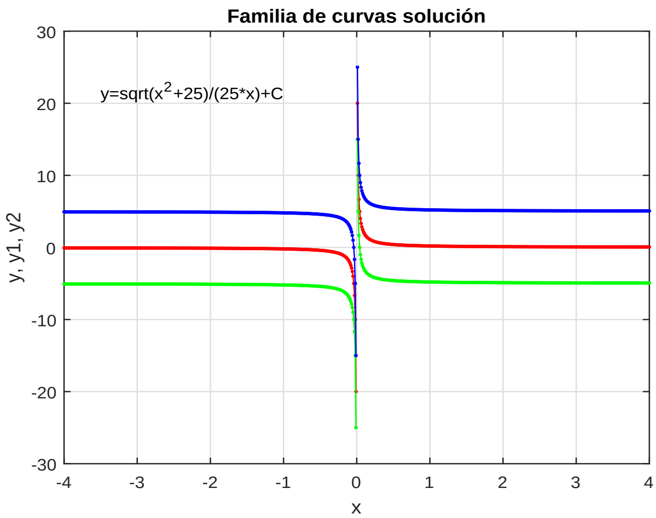


Figura 3.15: Familia de curvas solución

Ejemplo 3.5.2 *Halle la integral indefinida* $\displaystyle\int \frac{5dx}{x^3\sqrt{4x^2-9}}$

Solución:

Hacemos sustitución trigonométrica y su respectivo diferencial y reemplazando se tiene:

$2x = 3\sec z$ entonces $dx = \dfrac{3}{2}\sec z \tan z dz$, además:

$$\sqrt{4x^2-9} = \sqrt{9\sec^2 z - 9} = 3\tan z$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{5dx}{x^3\sqrt{4x^2-9}} = \frac{20}{27}\int \frac{\sec z \tan z dz}{\sec^3 z \tan z} \\
&= \frac{20}{27}\int \frac{1}{\sec^2 z}dz = \frac{20}{27}\int \cos^2 z dz \\
&= \frac{20}{27}\int \frac{1+\cos 2z}{2}dz = \frac{10}{27}\int dz + \frac{10}{27}\int \cos 2z dz \\
&= \frac{10}{27}z + \frac{5}{27}\operatorname{sen} 2z = \frac{10}{27}z + \frac{10}{27}\operatorname{sen} z \cos z + c \\
&= \frac{10}{27}\operatorname{arcsec}(\frac{2x}{3}) + \frac{10}{27}\frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x}\frac{3}{2x} + c \\
&= \frac{10}{27}\operatorname{arcsec}(\frac{2x}{3}) + \frac{5}{18}\frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2} + c
\end{aligned}$$

Representación gráfica de curvas solución:

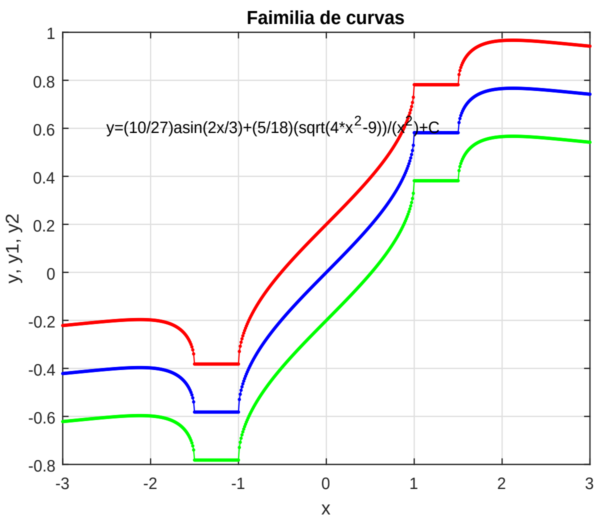


Figura 3.16: Curvas solución

Ejemplo 3.5.3 *Halle la integral indefinida* $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+11}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx$

Solución: Completando al cuadrado el polinomio radical $7-6x-x^2 = 16-(x+3)^2 = 16 - z^2$, sea $z = 4\operatorname{sen} u$ entonces $dz = 4\cos u du$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2+6x+11}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx = \int \frac{(x+3)^2+2}{\sqrt{16-(x+3)^2}}dx \\
&= \int \frac{z^2+2}{\sqrt{16-z^2}}dz = \int \frac{z^2}{\sqrt{16-z^2}}dz + \int \frac{2}{\sqrt{16-z^2}}dz \\
&= \int \frac{16\operatorname{sen}^2 u}{4\cos u} 4\cos u du + \int \frac{8\cos u du}{4\cos u} du \\
&= \int 16\operatorname{sen}^2 u du + \int 8du = 16\int \frac{1-\cos 2u}{2}du + 8u + c \\
&= 8\int du - 8\int \cos 2u du + 8u + c \\
&= 16u - 4\operatorname{sen} 2u du + c = 16 \operatorname{arc\,sen}(\frac{z}{4}) - 8\operatorname{sen} u \cos u + c \\
&= 16 \operatorname{arc\,sen}(\frac{x+3}{4}) - 8\frac{z}{4}\frac{\sqrt{16-z^2}}{4} + c \\
&= 16 \operatorname{arc\,sen}(\frac{x+3}{4}) - 8\frac{x+3}{4}\frac{\sqrt{7-6x-x^2}}{4} + c \\
&= 16 \operatorname{arc\,sen}(\frac{x+3}{4}) - (x+3)\frac{\sqrt{7-6x-x^2}}{2} + c
\end{aligned}$$

Representación gráfica de la familia de curvas solución:

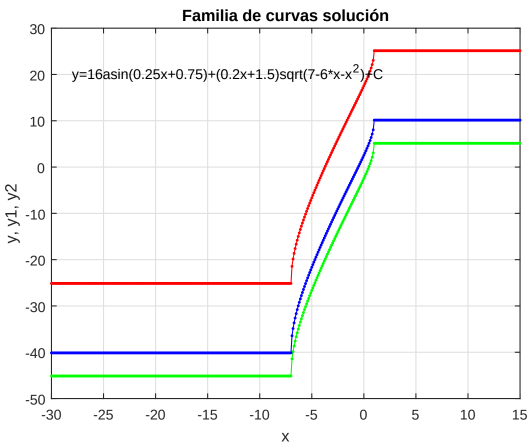


Figura 3.17: Curvas solución

3.5.1. Ejercicios propuestos

Halle la integral indefinida utilizando propiedades de sustitución trigonométrica:

1. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = 2\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{x+1}{4}) + (\frac{x+1}{2}).\sqrt{3-2x-x^2} + C$

2. $\int x^2.\sqrt{16-x^2}dx = 32\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{x}{4}) - \frac{1}{4}\sqrt{16-x^2}(8x-x^3) + C$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}dx = (3-2x)\sqrt{-4x^2+12x-5} + \frac{11}{8}\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{2x+3}{2}) + C$

4. $\int \frac{2x^3}{2x^2-4x+3}dx = \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{5}{4}\ln(2x^2-4x+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(\frac{2x-2}{\sqrt{2}}) + C$

5. $\int \sqrt{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{4+x^2}) + C$

6. $\int \frac{2x^2-4x+4}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx = -(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + \mathrm{arc\,sen}(\frac{x-1}{2}) + C$

7. $\int \frac{12}{(2x-1)\sqrt{(4x^2-4x-8)^3}}dx = -\frac{3}{\sqrt{3(4x^2-4x-8)}} + \frac{2}{9}\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{2x-1}{3}) + C$

8. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{64}\arctan(\frac{x}{2}) - \frac{2x(4-x^2)}{(4+x^2)^2} + C$

9. $\int \frac{2x-3}{(x^2+2x-3)^{3/2}}dx = \frac{5}{4}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}} - \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{\sqrt{x^2+2x+5}}}dx = \sqrt{x^2+2x+5}\frac{2x^2-5x-5}{6} + 5\ln[x+1+\sqrt{x^2+2x+5}] + C$

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{-4x^2-12x-5}}dx = \frac{11}{8}\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{2x+3}{2}) + \frac{1}{8}(3-2x)\sqrt{-4x^2-12x-5}$

12. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \frac{9x\sqrt{9-x^2}}{8} + \frac{81}{8}\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{x}{3}) + \frac{x}{4}\sqrt{(9-x^2)^3}$

3.6. Integración por partes

Método de integración por partes es fundamental y su aplicación a una serie de problemas sociales, económicos , ambientales, físicos etc., esto se define como producto de funciones logarítmicas, trigonométricas, potencias , exponenciales, polinomiales. Esto implica que nos encontramos de una integral indefinida no fácilmente de su

resolución y se require de uso de todas las propiedades de integración directas o especiales.
Sean $u = f(x)$, $v = g(x)$ dos funciones derivables y integrables sobre un intervalo abierto contenido en la recta real, y se tiene por uso de la regla de derivación de funciones reales:
$d(uv) = udv + udv$ entonces $udv = d(uv) - vdu$ aplicamos el operador integral a cada miembro y queda así:

$$\int udv = uv - \int udu$$

conocida como integración por partes, donde la función $u = f(x)$ se considera mas difícil, puede ser una función polinomial, exponencial, logarítmica, funciones trigonométricas directas o inversas para el proceso de derivación y la diferencial dv se considera mas fácil para el proceso de integración, y luego deber utilizarse propiedades de integración, y tiene dos términos el primero sed sustituye y el segundo término se continua con el proceso de integración según las propiedades, [12], [10], [21].

Ejemplo 3.6.1 *Halle la integral indefinida* $I = \int x^2 e^{4x} dx$

Solución:
Sea $u = x^2$ entonces su diferencial es $du = 2xdx$,mientras la función $v = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4}$, reemplazando estas funciones en la fórmula de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int udv &= uv - \int udu \\ \int x^2 e^{4x} dx &= x^2 \frac{e^{4x}}{4} - \frac{1}{2} I' \end{aligned}$$

$$I' = \int x e^{4x} dx = x\frac{e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4} dx = x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + c$$

Reemplazando en I el resultado I' respetando el orden y signo de las funciones integrales y los elementos diferenciales equivalentes y se procede respetando las reglas de derivación e integración.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 e^{4x} dx = x^2 \frac{e^{4x}}{4} - \frac{1}{2}[x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16}] + c \\ &= e^{4x}[x^2 - \frac{x}{8} + \frac{1}{16}] + c \end{aligned}$$

Representación gráfica de la familia de curvas:

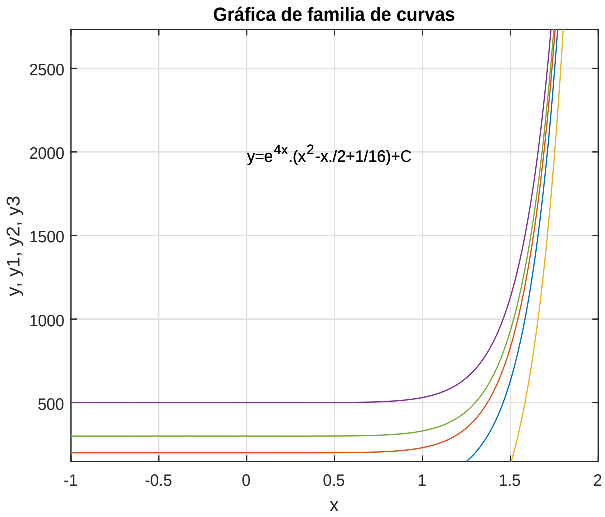


Figura 3.18: Familia de curvas solución

Ejemplo 3.6.2 *Halle la integral indefinida* $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$

Solución:

Representación gráfica de las curvas solución:

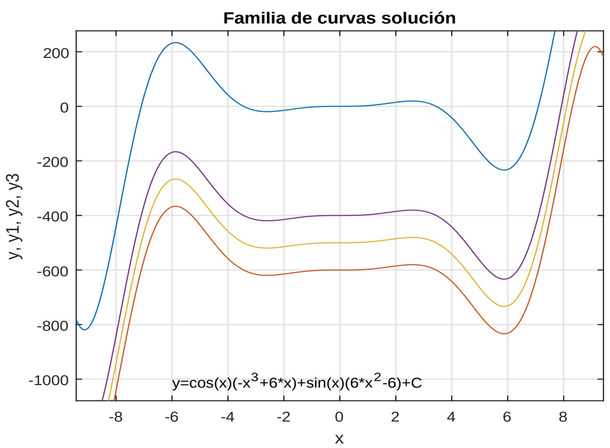


Figura 3.19: Familia de curvas solución

Sea $u = x^3$ entonces $du = 3x^2dx$, además $v = \int \operatorname{sen} xdx = -\cos x$ reemplazando el la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
I &= -x^3\cos x + \int 3x^2\cos xdx, \text{ sea} u = x^2 \text{ entonces } du = 2xdx, v = \operatorname{sen} x \\
&= -x^3\cos x + 6x^2\operatorname{sen} x - 6\int x\operatorname{sen} xdx, \text{ sea } u = x \text{ entonces } du = dx, v = -\cos x \\
&= -x^3\cos x + 6x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\int \cos xdx \\
&= -x^3\cos x + 6x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + c \\
&= \cos x[-x^3 + 6x] + \operatorname{sen} x[6x^2 - 6] + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.3 *Halle la integral indefinida* $\int 3x\arctan^2 xdx$

Solución:

Uso de fórmula de integración por partes, sea $u = \arctan^2 x$ entonces su diferencial $du = 2\arctan x\dfrac{dx}{x^2+1}$, además la variable $v = \int 3xdx = \dfrac{3x^2}{2}$, ahora reemplazando en:

$$\begin{aligned}
I &= \int 3x\arctan^2 xdx \\
&= \frac{3x^3\arctan^2 x}{2} - 3\int \frac{x^2\arctan xdx}{x^2+1} \\
&= \frac{3x^2\arctan^2 x}{2} - 3\int (1 - \frac{1}{x^2+1})\arctan xdx \\
&= \frac{3x^2\arctan^2 x}{2} - 3\int \arctan xdx + 3\int \frac{1}{x^2+1})\arctan xdx,
\end{aligned}$$

uso de integración por partes al segundo término, y esto es , $u = \arctan x$ entonces $du = \dfrac{1}{x^2+1}dx$ luego $v = x$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{3x^2\arctan^2 x}{2} - 3x\arctan x + 3\int \frac{x}{x^2+1}dx + 3\int udu \\
&= \frac{3x^2\arctan^2 x}{2} - 3x\arctan x + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}u^2 + c \\
&= \frac{3x^2\arctan^2 x}{2} - 3x\arctan x + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\arctan^2(x) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.4 *Halle la integral indefinida de* $\int x^3 \operatorname{sen}(x-2)dx$

Solución:

$\int x^3 \operatorname{sen}(x-2)dx = \int (z+2)^3 \operatorname{sen} zdz = \int (z^3+6z^2+12z+8) \operatorname{sen} zdz$

$I = \int z^3 \operatorname{sen} zdz + 6\int z^2 \operatorname{sen} zdz + 12\int z \operatorname{sen} zdz + 8\int \operatorname{sen} zdz$

Sea $u = z^3$ entonces $du = 3z^2dz$ y $v = -\cos z$ $I = -z^3\cos z + 3\int z^2 \cos zdz + 6\int z^2 \operatorname{sen} zdz + 12\int z \operatorname{sen} zdz - 8\cos z$

Sea $u = z^2$ entonces $du = 2zdz$, $v = \operatorname{sen} z$ para el segundo término, mientras para el tercer término se tiene $u = z^2$, y $v1 = -\cos z$

$$\begin{aligned}
I &= -z^3\cos z + 3z^2 \operatorname{sen} z - 6\int z \operatorname{sen} zdz - 6z^2\cos z + 12\int z\cos zdz + 12\int z \operatorname{sen} zdz - 8\cos z \\
&= -z^3\cos z + 3z^2 \operatorname{sen} z - 6z^2\cos z - 6\int z \operatorname{sen} zdz + 12\int z\cos zdz - 8\cos z + c \\
&= -z^3\cos z + 3z^2 \operatorname{sen} z - 6z^2\cos z + 12z \operatorname{sen} z + 6z\cos z + 12\cos z - 6\operatorname{sen} z - 8\cos z + c \\
&= -z^3\cos z + 3z^2 \operatorname{sen} z - 6z^2\cos z + 12z \operatorname{sen} z + 6z\cos z + 4\cos z - 6\operatorname{sen} z + c \\
&= -(x-2)^3\cos(x-2) + (x-2)^2 \operatorname{sen}(x-2) - 6(x-2)^2\cos(x-2) + 12(x-2)\operatorname{sen}(x-2) + \\
&\quad 6(x-2)\cos(x-2) + 4\cos(x-2) - 6\operatorname{sen}(x-2) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.5 *Halle la integral indefinida* $\int (x^3-3x^2+2x+3)\ln(x)dx$

Solución:

Sea $u = \ln x$ entonces $du = \dfrac{du}{x}$ además $v = \int dv = \int (x^3 - 3x^2 + 2x + 3) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x$ ahora reemplazando en la fórmula de integración por partes.

$$\int (x^3-3x^2+2x+3)\ln xdx = (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x)\ln x - \int (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x)\frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned}
I &= (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x)\ln x - \int (\frac{x^3}{4} - x^2 + x + 3)dx \\
&= (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x)\ln x - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + c
\end{aligned}$$

3.6.1. Ejercicios propuestos

Halle la integral indefinida usando la fórmula de integración por partes

1. $\displaystyle\int (e^{3x}+e^{2x}+3)\cos 2x dx = \frac{2e^{3x}\operatorname{sen} 2x}{13}+\frac{3e^{3x}\cos 2x}{13}+\frac{e^{2x}\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{e^{2x}\cos 2x}{4}+\frac{3\operatorname{sen} 2x}{2}+c$

2. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(3x+2)dx = \frac{3x+2}{3}\operatorname{arc\,sen}(3x+2)+\frac{1}{3}\sqrt{-9x^2-6x-3}+c$

3. $\displaystyle\int \sec^3(3x)dx = \frac{\sec(3x)\tan(3x)}{6}+\frac{\ln(\sec(3x)+\tan(3x))}{6}+c$

4. $\displaystyle\int x\arctan(\sqrt{1-x^2})dx = \frac{x^2\arctan(\sqrt{1-x^2})}{2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}+c$

5. $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(3x)dx = \frac{2\cos(3x)}{27}+\frac{2x\operatorname{sen}(3x)}{9}-\frac{x^2\cos(3x)}{3}+c$

6. $\displaystyle\int x^4\ln^2 x dx = \frac{x^5\ln^2 x}{5}-\frac{2x^5\ln x}{25}+\frac{2x^5}{125}+c$

7. $\displaystyle\int \frac{(x^4+5x^2+4)\arctan x}{(x^2+1)^2}dx = x\arctan x-\frac{3\arctan^2 x}{2}-\frac{\ln(x^2+1)}{2}+c$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2\arctan x}{x^2+1}dx = x\arctan x-\ln(\sec(\arctan x))-\frac{\arctan^2 x}{2}+c$

9. $\displaystyle\int x^2\operatorname{arc\,sen} x dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,sen} x+\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}+c$

3.7. Aplicación de integrales indefinidas

En el contexto real se presentan problemas sociales, físicos, ambientales, económicos, biológicos etc., que son expresados mediante modelos matemáticos denominados de ecuaciones diferenciales de primer orden, segundo orden los cuales para hallar la solución general se requiere uso de las propiedades de integrales indefinidas. Por ejemplo el problema de crecimiento y decrecimiento poblacional, Ley de calentamiento y enfriamiento de Newton, problemas asociados a la termodinámica, conservación de masa y densidad.

Ejemplo 3.7.1 *La temperatura del agua desciende de* $100\ ^\circ C$ *a* $85^\circ C$ *en un tiempo de* 12 *minutos.El agua se coloca a un recipiente de temperatura* $30^\circ C$. *(a) Halle la* *temperatura al cabo de* 20 *minutos (b) determine el tiempo si la temperatura del agua llega a* $45° C$.

Solución:

1. Sea $T(t)$ la temperatura del agua en cualquier instante de tiempo t minutos, la temperatura inicial del recipiente es 30°C, entonces el agua transfiere su calor hacia el recipiente y tenemos la ecuación de enfriamiento de Newton: $T(t) - 30$, y razón de cambio de la temperatura es $\dfrac{dT}{dt}$ proporcional a la disminución de $T(t) - 30$, entonces la Ley de enfriamiento de Newton queda expresada $\dfrac{dT}{dt} = -k(T(t) - 30)$, esto implica la temperatura del agua está disminuyendo en el tiempo y por ello se considera la constante de proporcionalidad $-k$.

2. Utilizar el proceso de integración de $\dfrac{dT}{dt} = -k(T(t) - 30)$ aplicamos el operador integral a cada miembro $\displaystyle\int dfracdTT - 30 = -\int kdt$ entonces $ln(T(t) - 30) = -kt + C$, luego usamos la propiedad de logaritmo y resulta: $T - 30 = A.e^{-kt}$ y la función de temperatura del agua es: $T(t) = 30 + A.e^{-kt}$ en cualquier tiempo arbitrario.

3. Por condiciones iniciales del problema de enfriamiento de Newton para el agua: $T(t) = 30 + A.e^{-kt}$ °C
   Si $t = 0$ minutos tenemos $T(0) = 30 + A = 100$ entonces la constante resulta $A = 70$ °C; el problema de enfriamiento de Newton queda $T(t) = 30 + 70e^{-kt}$

4. Hallemos la constante de proporcionalidad k, al cabo de $t = 12$minutos la temperatura del agua llega $T(12) = 85$°C entonces $T(12) = 30 + 70.e^{-12k} = 85$ resolviendo la ecuación obtenemos $k = \frac{0.02}{min}$, ahora reemplazando estos valores queda el problema de enfriamiento de Newton $T(t) = 30 + 70e^{-0.02t}$ °C, la temperatura del agua en cualquier instante de tiempo.

5. Determinamos la temperatura del agua al cabo de $t = 20$minutos $T(20) = 30 + 70e^{0.02*20} = 77$°C, luego si la temperatura del agua es $T(t) = 45$°C entonces hallemos en que tiempo llega a esta temperatura, $45 = 30 + 70e^{-0.02t}$ resolviendo la ecuación se tiene $t = 77$ minutos.

Representación gráfica de la solución particular.

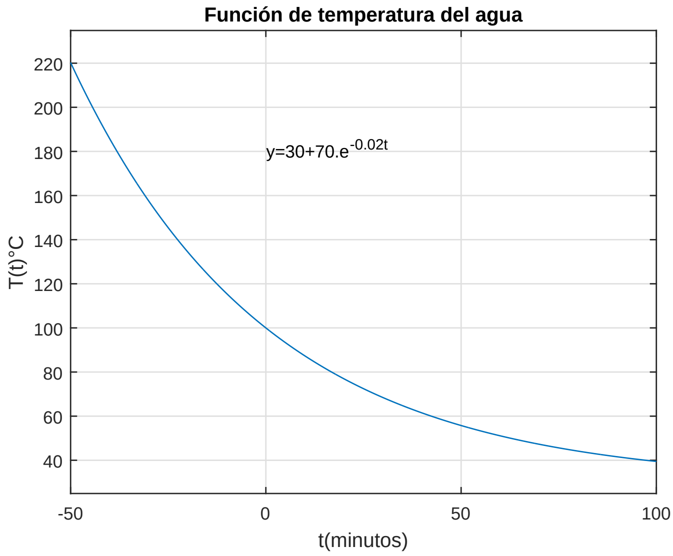


Figura 3.20: Solución particular

Ejemplo 3.7.2 *Un termómetro que marca* $18°F$ *luego se lleva aun cuarto cuya temperatura es de* $70\ °C$*. Un minuto después de la lectura del termómetro es de* $31°F$*. Determine la función de temperatura en cualquier tiempo arbitrario y determine la temperatura del termómetro al cabo de* 5 *minutos después de ser llevado al cuarto.*

Solución:

En base a las condiciones del problema de enfriamiento de Newton se tiene la ecuación diferencial, este caso el cuarto tiene mayor temperatura, y el termómetro tiene menor temperatura, esto implica el cuarto transfiere calor al termómetro: $\dfrac{dT}{dt} = -k(T-70)$ llamada variación de temperatura del termómetro.

Si $t = 0$minutos entonces $T(0) = 18$°F

Si $t = 1$minutos entonces se observa $T(1) = 31$°F

Realizamos proceso de integración al problema de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{T-70} = -kt$$

$\displaystyle\int \frac{dT}{T-70} = \int -kdt$ entonces $ln(T-70) = -kt + C$ curva solución , aplicamos propiedad de logaritmo y se tiene: $T(t) = 70 + A.e^{-kt}$ llamada función de temperatura del termómetro en cualquier tiempo.

Hallemos la constante integración A y $T(0) = 70 + A.e^{-k0} = 18$ entonces $A = -52$ °F

Hallamos la constante k y $t = 1$minutos entonces $T(1) = 70 + A.e^{-k} = 31$, resolviendo

se tiene $k = 0.29$, reemplazando estos valores de A y k el problema de enfriamiento de Newton: $T(t) = 70 - 52.e^{-0.29t}$ °F, la temperatura del termómetro en cualquier instante de tiempo.
Finalmente hallemos la temperatura del termómetro al cabo de $t = 5$ minutos y resulta $T(5) = 70 - 52e^{-0.29(5)}$ entonces $T(5) = 57.8$ °F
Representación particular del problema de enfriamiento de Newton, para la función de temperatura del agua caliente.

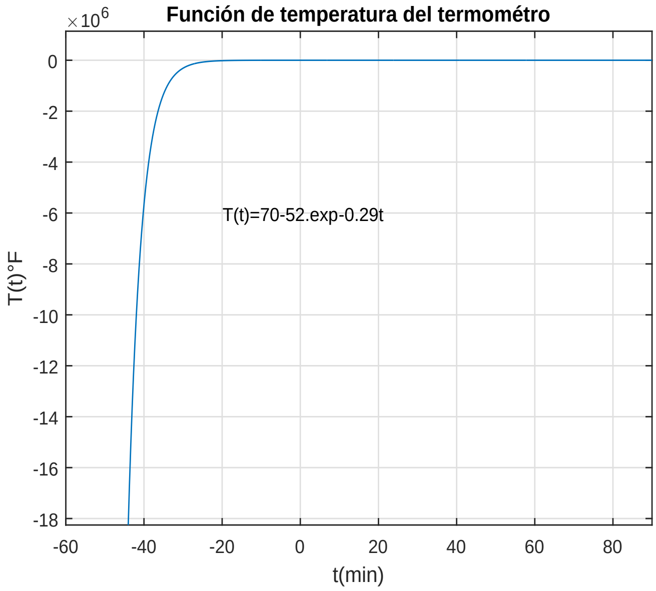


Figura 3.21: Solución particular

Ejemplo 3.7.3 *Se establece que dentro de t años el costo del terreno por m^2 en el cercado de la ciudad de Puerto Maldonado , estará aumentando a razón de una función derivable $P'(t) = \dfrac{0.6t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 800}}$ dólares/m2/año. El m^2 del terreno en la actual es de 72 dólares/m2. ¿Cuánto será su valor del terreno m^2 dentro de 10 años, dentro de 25 años y 30 años?*

Solución: La razón de cambio del costo del terreno es $P'(t) = \dfrac{0.6t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 800}}$

utilizando las propiedades de integración se tiene: $P(t) = \displaystyle\int \frac{0.6t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 800}} dt$

hacemos cambio de variable $u = 0.2t^4 + 800$ y su diferencial $du = 0.8t^3 dt$ reemplazado resulta:

Si $P(t)=\int \frac{0.6t^3}{\sqrt{0.2t^4+800}}dt=\frac{3}{2}u^{1/2}+C$ solución general del problema.

Si $P(t)=\frac{3}{2}u^{1/2}+C=\frac{3}{2}.\sqrt{0.2t^4+800}+C$ dólares/m2, solución general de costo del terreno en cualquier tiempo arbitrario.

Hallar el valor de la constante de integración C, en $t=0$ años y se tiene el precio inicial $P(0)=\frac{3}{2}.\sqrt{0.28(0)^4+800}+C=72$ entonces $42+C=72$ esto es:$C=30$ dolares/m2 el costo inicial del terreno por m^2, supongamos el año 2016.

$P(t)=\frac{3}{2}.\sqrt{0.28t^4+800}+30$ dólares/m^2 es la solución particular del problema de costo del terreno.

Ahora hallamos el costo del terreno a cabo de $t=10$ años y resulta el precio valorado $P(10)=\frac{3}{2}\sqrt{0.28(10)^4+800}+30=109$ dólares/m^2, esto para el año 2026.

Ahora hallamos el costo del terreno a cabo de $t=20$ años y resulta el precio valorado $P(20)=\frac{3}{2}\sqrt{0.28(20)^4+800}+30=451$ dólares/m^2 , esto para el año 2036

Ahora hallamos el costo del terreno a cabo de $t=30$ años y resulta el precio valorado $P(30)=\frac{3}{2}\sqrt{0.28(30)^4+800}+30=635$ dólares/m^2 , esto para el año 2046

Representación gráfica de la solución particular del problema de costo del terreno en la ciudad de Puerto Maldonado.

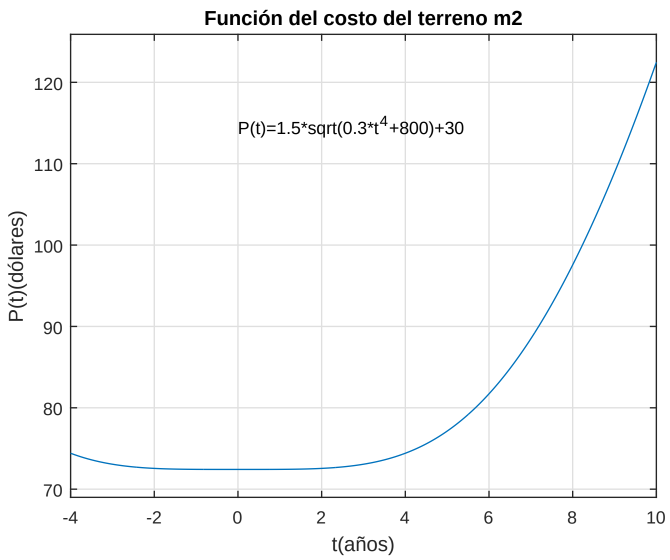


Figura 3.22: Solución particular

Ejemplo 3.7.4 *En la actualidad el precio de un inmueble es de* 120000 *dólares americanos. Considere después de un tiempo t años, un ingeniero establece un modelo matemático de la velocidad de incremento económico del inmueble definida mediante* $\dfrac{dp}{dt} = -0.02p(t) - 10t$ *dólares por año. ¿Cuánto costará el inmueble dentro de* 10 *años y* 20 *años?*

Solución:
La velocidad de incremento del precio del inmueble es: $\dfrac{dp}{dt} + 0.02p = -10t$, es una expresión matemática de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y no homogénea la solución general es:

$$p(t) = (\exp)^{\int 0.02dt}\left(-\int (\exp)^{\int 0.02dt} 10tdt + c\right)$$

Hacemos cambio de variable de integración sea $z = -0.02t$ entonces $dz = -0.02dt$.

$$\begin{aligned} p(t) &= (\exp)^{0.02t}[-10\int (\exp)^{0.02t} tdt + c] \\ p(t) &= (\exp)^{-z}[-\frac{10}{(0.02)^2}\int (\exp)^{z} dz + c] \end{aligned}$$

Realizando el proceso de integración por partes al primer término resulta:

$$\begin{aligned} p(t) &= (\exp)^{-z}[-\frac{10}{(0.02)^2}\int (\exp)^{z} zdz + C] = (\exp)^{-z}[\frac{10}{(0.02)^2}((\exp)^{z} z - (\exp)^{z}) + c] \\ p(t) &= [-\frac{10}{(0.02)^2}(z-1) + C(\exp)^{-z}] \\ p(t) &= -\frac{10}{(0.02)^2}[-0.02t - 1] + A.(\exp)^{0.02t} \\ p(t) &= \frac{10}{(0.02)^2}[0.02t + 1] + A.(\exp)^{0.02t} \text{ dólares americanos en cualquier tiempo.} \end{aligned}$$

Hallemos la constante A, inicialmente el precio del inmueble fue 120000 dólares americanos y haciendo los cálculos algebraicos y aritméticos resulta $A = 95000$ dólares americanos. La solución particular del inmueble es:
$p(t) = 25000[0.02t + 1] + 95000(\exp)^{0.02t}$ dólares americanos.

A continuación el precio aproximado del inmueble al cabo de 10 y 20 años respectivamente:

$p(10) = \lim\limits_{t\to 10} 25000[0.02t + 1] + 95000(\exp)^{0.02t} = 146033.26$ dólares americanos.

$p(20) = \lim\limits_{t\to 20} 25000[0.02t + 1] + 95000(\exp)^{0.02t} = 176723.35$ dólares americanos.

3.7.1. Ejercicios propuestos

Resolver problemas bajo los fundamentos y propiedades de integral indefinida, a las siguientes situaciones.

1. El elemento radio activo se desintegra a razón de proporcionalidad a la cantidad presente existente . Se requieren 1690 años para que el cincuenta por cierto de la cantidad dada se desintegre.

   a) Que cantidad de abastecimiento inicial de 60 gramos de sustancia radiactiva quedará después de 2000 años después

   b) Cuánto tiempo se necesita para un abastecimiento de 60gramos de sustancia radiactiva de modo que se reduce a 8 gramos.

2. El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece a un ritmo proporcional a la diferencia entre su valor inicial y su valor residual de 6000 dólares . La máquina nueva se compró con un precio de 45000 dólares y su valor fue de 35000 dólares después de 4 años.¿ Cuánto valdrá la maquinaria industrial al cabo de 8 años de uso?.

3. Actualmente el precio de cierto inmueble duradero es 120000 dólares. Considere el precio en cualquier instante de tiempo $P(t)$ dólares y t años y luego se incrementa a razón de: $\dfrac{dP}{dt} = -0.02p - 10t$ dólares/año y sea la constante de proporcionalidad $k = 1$, ¿Cuánto costará dicho inmueble dentro de 5 años y 10 años?

4. Se estima dentro de t años la población de cierta comunidad de región de Madre de Dios se incrementa a razón de $\dfrac{dP}{dt} = 0.3t^2 + t + 0.25$ personas por año . Si el ingeniero de medio ambiente ha descubierto que el nivel de polución es aproximadamente de 5 unidades de cada 1000 personas.En la actualidad el nivel de polución es 60 unidades ¿Cuánto será el nivel de polución dentro de 2 años y 5 años?

5. Se calcula dentro de t años el valor del metro cuadrado de un terreno en cercado de la ciudad de Puerto Maldonado crece a razón de $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{14t^3}{\sqrt{0.3t^2 + 9000}}$ dólares por año. Si el valor del terreno en el año 2016 es 400 dólares el metro cuadrado ¿Cuánto será el precio dentro de 10 años y 20 años?

6. La razón con que cambia la temperatura de un producto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del medio ambiente . La bebida helada se retira de la congeladora un día caluroso y se coloca a un ambiente cuya temperatura sea de 42 °C, siendo la temperatura de la bebida de 5 °C al momento de retirar de la congeladora, pero cuando han transcurrido 15 minutos alcanza una temperatura de 30°C . A que temperatura estará dentro de una hora y dos horas después?

7. La población peruana es de 30 millones de personas y después creció a razón de 30 mil personas por día , supóngase que son constante los indices de natalidad y mortalidad ¿Para cuando se puede esperar una población peruana de 40 millones de habitantes?

8. un tanque de 120 galones inicialmente contiene 90 libras de sal disueltas en 90 galones de agua. Hacia el tanque fluye salmuera que contiene 2 libras por galón a razón de 4 galones por minuto y la mezcla fluye hacia afuera del tanque a razón de 3 galones por minuto.¿Cuánta sal contiene cuando se llena el tanque?

9. Una maruchada de 5 libras originalmente a 50°F se pone en el horno que está a 380°F a las 5 : 00 p.m , se encontró que la temperatura en cualquier instante de tiempo sea $T(t)$ °F, siendo de la carne 125 °F después de 75 minutos, ¿ A que hora estará a 150 °F medio cocido y totalmente cocido sea 170°F ?

10. Supóngase que un cuerpo se deja caer desde cierta altura de modo que la velocidad inicial es cero, en este caso es conveniente escoger el eje de las Y dirigiéndose hacia bajo con $y(0) = 0$, así la posición vertical en cualquier instante de tiempo sea $y(t)$ pies y la función aclaración del móvil que cae está por la ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dv}{dt} = g - \rho v^2$, donde $v(t)$, es la función velocidad en cualquier tiempo arbitrario y t representa segundos. Sea $\rho = 1$. Halle la función velocidad del móvil al cabo de 5 segundos y 10 segundos.

Capítulo 4

Integral definida y aplicaciones

4.1. Introducción

La integración es un concepto fundamental del cálculo diferencial e integral del análisis matemático. Básicamente una integral definida es una generalización de la suma infinita de sumandos de elementos diferenciales tan pequeños de cierta magnitud o variable independiente. El cálculo diferencial corresponde a la noción geométrica de tangencia y a la idea de física la velocidad , mientras el calculo integral está asociado a noción geométrica del área volumen y a la idea de física al estudio de trabajo, la integral definida de una función sobre un intervalo es muy importante en ingeniería, ciencias y matemáticas puras en general. La integral indefinida de una función es una familia de curvas integrales, pero una integral definida de una función es una cantidad numérica es decir posee los limites de integración inferior y superior bajo éstos valores numéricos se realiza el proceso de integración y tiene aplicaciones al contexto real como cálculo de área de una superficie, volúmenes, longitud de arco etc., de funciones integrables: polinomiales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales entre otras.La integral definida o integral de B. Riemann (1846) surge históricamente con la resolución del problema de estimación de las funciones: distancias, áreas volúmenes y valores promedios con las sumas finitas, es mas describe como el límite de la suma infinita cuando el sumando tiende al infinito y cada uno de área o volúmenes infinitesimales tienden a cero y el resultado de sumar todos los elementos diferenciales infinitesimales comprendidos en un intervalo cerrado sobre la recta real. Estas sumas tiendan a un límite cuando los intervalos que se usan se hacen cada vez numerosos y más cortos, así como las sumas finitas de áreas para una cantidad de n rectángulos, de distancias recorridas, longitud de arco y volúmenes. Según I. Barrow (1669), la integral definida de una función real responde a la necesidad de mejorar los métodos de medición de un área, volumen subtendidas bajo líneas y regiones limitadas por las curvas y los ejes coordenados, es decir la integral definida es utilizado para calcular el valor de las áreas limitadas por las curvas y rectas, además para calcular longitud de arco y volúmenes de revolución respecto a los ejes X, Y es decir el proceso de integración de una función en un intervalo es el límite de la suma infinita de toda los elementos diferenciales de áreas, volúmenes o distancias limitada en un intervalo contenida en la recta real y tiene aplicación al contexto real, pero se utiliza todas las propiedades y técnicas de integración de integral indefinida.

4.2. Estimación con sumas finitas

4.2.1. Distancia recorrida o problema de distancias

Una partición Δ de un intervalo cerrado $[a,b]$ es el conjunto de todos los subintervalos de la forma $[x_0, x1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$, además $a = x_0 < x_1 < \ldots <$ $x_n = b$ con $n \in \mathbb{N}$. La longitud del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $\Delta x_i = x_{i-1}, x_i$, mientras la longitud del subintervalo más largo de la partición Δ, se llama norma de la partición y se denota $|\Delta|$ y se ilustra una partición cualquiera en el intervalo cerrado $[a,b]$, esto es:

$$D_T(t) = \sum_{k=0}^{n} v(t_i)\Delta t_i$$

es la distancia recorrida por el móvil, [6],[23]. La velocidad es la razón de la función

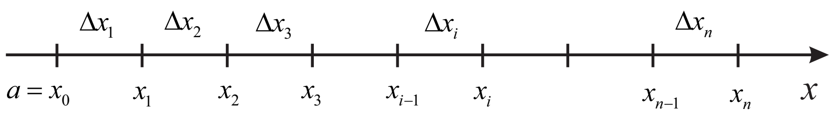


Figura 4.1: Partición del intervalo [a, b]

posición $f(t)$ respecto al tiempo , esto es: $v(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$ entonces la distancia recorrida por un móvil a lo largo del intervalo $[a,b]$ donde t denota tiempo, en su forma diferencial es:

$$D(t_i) = f(t_i)\Delta t_i$$

.

$D_T(t) = D(t_1) + D(t_2) + D(t_3) + \cdots + D(t_n)$

$D_T(t) = v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + v(t_3)\Delta t_3 + \cdots + v(t_n)\Delta t_n$

$D_T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} v(t_i)\Delta t_i$ entonces $D_T(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v(t_i)\Delta t_i.$

Ejemplo 4.2.1 *La función de velocidad de un proyectil sea verticalmente hacia arriba definida por $v(t) = 200 - 10t$ pies/seg. Determine la distancia recorrida por el móvil durante los 4 primeros segundos.*

Solución:

Evaluar la función velocidad en los instantes de tiempo $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$, $t = 4$ segundos , para ello hacemos cuatro divisiones cuya longitud sea la unidad en el intervalo $[0, 4]$ y la representación gráfica y la distancia total recorrida por el móvil es:

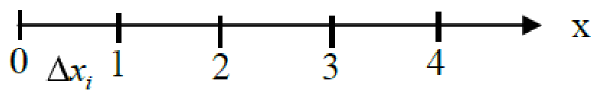


Figura 4.2: Partición del intervalo [0, 4]

$$\begin{aligned} D_T(t) &= v(0)\Delta t - 1 + v(1)\Delta t_2 + v(2)\Delta t_3 + v(4)\Delta t_4 \\ &= (200-0)(1) + (200-10)(1) + (200-20)(1) + (200-30)(1) + (200-40)(1) \\ &= (200)(1) + (190)(1) + (180)(1) + (170)(1) + (160)(1) = 900\text{metros} \end{aligned}$$

4.2.2. El problema de áreas

Para calcular el área de una región R que está limitada por debajo de la curva $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ y limitada por las rectas $x = a$, $x = b$ se debe considerar que la función sea continúa, además positiva sobre el intervalo; el área de la región limitada de trayectorias curvilíneas.

Sea la región $R = \{(x, y)/a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$ para ello consideramos franjas o trayectos de áreas verticales para cada subintervalo de ancho igual, y el área total es:

$$\begin{aligned} A_T(x) &= A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \cdots + A(x_n) \\ &= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i, \text{ esto es área de la superficie limitada.} \end{aligned}$$

El ancho de cada una de los transectos o franjas verticales cuya base sea $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ y el valor de cada $c_k = a + k\Delta x_k$ con $k = 1, 2, 3, \ldots$; [10], [13].

4.2.3. El problema de volúmenes

Para estimar el volumen de un sólido revolución o volúmenes de figuras geométricas no conocidas, definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$se considera la i-ésima rebanada cuadrada de sección transversal del sólido en c_k donde se denotado por $A(c_k) = f^2(c_k)$ y de espesor iguales o base definido por $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ y los puntos medios $c_k = a + k\Delta x_k$ con $k = 1, 2, 3, ...$ y elemento infinitesimal de volumen sea $\Delta V_k = f^2(c_k)\Delta x_k$ con $k = 1, 2, 3, ...$

El volumen del sólido de una función continúa e integrable; es el límite de la suma de volúmenes sólidos rebanadas de aproximación:

$$\begin{aligned} V_T(x) &= V(x_1) + V(x_2) + V(x_3) + \cdots + V(x_n) \\ &= \pi f^2(x_1)\Delta x_1 + \pi f^2(x_2)\Delta x_2 + \pi f^2(x_3)\Delta x_3 + \cdots + \pi f^2(x_n)\Delta x_n \\ &= \pi[f^2(x_1)\Delta x_1 + f^2(x_2)\Delta x_2 + f^2(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f^2(x_n)\Delta x_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f^2(x_i)\Delta x_i, \text{ esto es volumen del sólido, [10], [12].} \end{aligned}$$

4.3. Integral de Riemann

Dada una función $f(x)$ continúa sobre intervalo $[a, b]$ al seleccionar $n-1$ puntos $P = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ y $b \in P$ que cada uno de los subintervalos cerrados están contenidos en el intervalo cerrado $[a, b]$,esto es: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. El intervalo $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ se llama í-ésimo intervalo de la partición

P, evidentemente verifica: $\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$ A continuación elegimos un i-ésimo subintervalo típico cerrado $[x_{i-1}, x_i]$ de P, para construir un i-ésimo franja de área vertical de base $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_i)$ siendo un punto $(c_i, f(c_i))$ sobre la curva suave C.

Construimos un i-ésimo área de una franja rectangular de base y altura respectivamente $\Delta A_i = f(x_i)\Delta x_i$ entonces la suma finita del área es: $S(f,P) = \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ con $i = 1, 2, 3, \cdots$, al dividir en i-ésima franjas las áreas verticales de anchos iguales, de modo que el ancho del intervalo $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ y los puntos medios de cada subintevalo sea $c_i = a + i.\Delta x_i$. La aproximación del área total de una región limitada por una curva y los ejes coordenados o dos curvas permiten contribuir de mejorar en la medición próxima o cercana a través de n franjas verticales sobre la superficie o región limitada de modo que cada incrementa de las bases tienden a cero y la cantidad de franja de áreas verticales, es decir tiende a infinito de modo $\Delta x_i \to 0$ cuando $n \to \infty$ y el área total resulta:

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

La suma inferior de $f(x)$ relativa a la partición P es el número:

$$s(f,P) = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

La suma superior de $f(x)$ relativa a la partición P es el número:

$$S(f,P) = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Es evidente que $m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$, sea cual fuere la partición P. Además verifica $S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=0}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Definición 4.1 (Integral de Reimann) *Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en el intervalo $[a,b]$, además la función $f(x)$ sea no negativa, esto es, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Consideremos una region $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$, [7], [8].*

Teorema 4.3.1 *Cuando se refina una partición, la suma inferior o disminuye y la suma superior no aumenta. Si la partición Q y la partición P cumple $P \subseteq Q$ entonces verifica $s(f,P) \leq s(f,Q)$ y $S(f,Q) \leq S(f,P)$*

Teorema 4.3.2 *Para cualesquiera particiones P y Q del intervalo $[a, b]$ y cualquier función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se tiene $s(f, P) \leq S(f, Q)$. En efecto, la partición $P \cup Q$ refina simultáneamente a la partición P y la partición Q luego verifica $s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$.*

Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice integrable cuando su integral inferior y su integral superior son iguales. Éste valor común se llama integral de Reimann de $f(x)$ y se denota por: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim\limits_{|\Delta x|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

La integral definida de la función $f(x)$ también se llama integral de I. Barrow

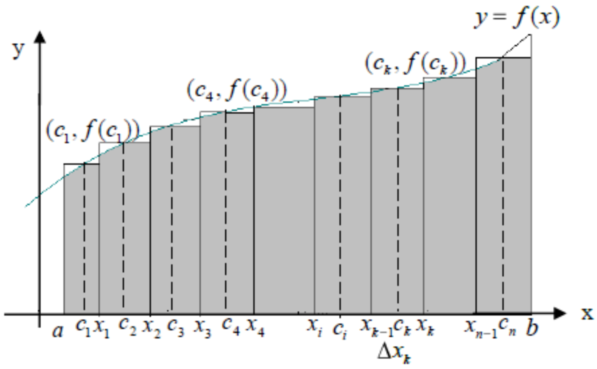


Figura 4.3: Suma superior en partición del intervalo [a, b]

$\lim\limits_{|\Delta x|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, cuya representación gráfica:

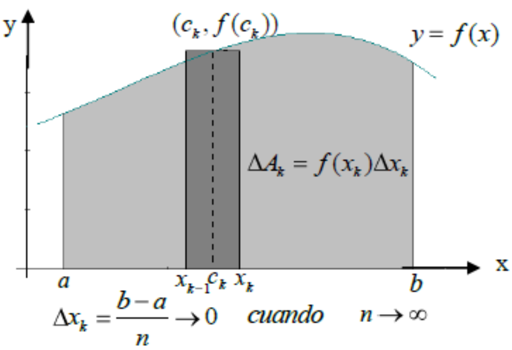


Figura 4.4: Suma superior en partición del intervalo [a, b]

4.4. Propiedades de la integral definida

Teorema 4.4.1 *Sean $a < c < b$. Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si, sus restricciones $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son funciones integrables, en caso afirmativo verifica: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, [5], [21].*

Teorema 4.4.2 *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces:*

1. La suma $f+g$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. El producto escalar $k.f$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \in R$
3. Si $0 < k \leq; |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ entonces el cociente es $\dfrac{f}{g}$ es integrable
4. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. Si $|f(x)|$ es integrable y $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Definición 4.2 (Integral definida tipo R_x) *Sea una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y continua en el intervalo $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable sobre $[a,b]$ además $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. El área de la region limitada entre las curvas $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ verifica: $A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, llamado integral de I. Barrow, [1], [4]. La representación gráfica es:*

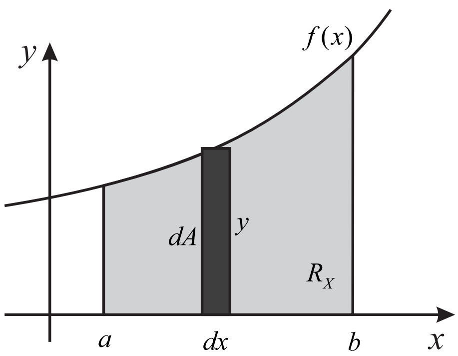


Figura 4.5: Integral definida Tipo R_X

Definición 4.3 (Integral definida tipo R_y) *Sea una función acotada $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ y continua en el intervalo $[c, d]$, entonces $g(x)$ positiva e integrable sobre $[c, d]$ además $g(x) > 0$ para todo $x \in [c, d]$. El área de la region limitada entre las curvas $x = g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$ verifica: $A = \int_c^d g(y)dy = G(d) - G(c)$, llamado integral de I. Barrow, [1], [4]. La representación gráfica es:*

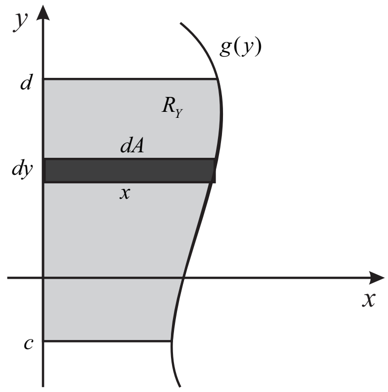


Figura 4.6: Integral definida Tipo R_Y

Definición 4.4 (Integral definida tipo R_x para dos funciones) *Sean las funciones acotadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables de modo que $f(x) \geq g(x)$. El área de la region limitada por las curvas $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ denominada del tipo R_X entonces verifica.*

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = H(b) - H(a)$ *, la representación gráfica es:*

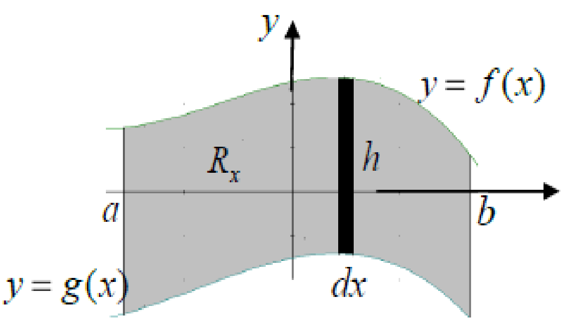


Figura 4.7: Integral definida Tipo R_Y

Definición 4.5 *Sean las funciones acotadas $f, g : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrables de modo que $f(y) \geq g(y)$. El área de la region limitada por las curvas $x_1 = f(y)$ y $x_2 = g(y)$ y las rectas $y = c$, $y = d$ denominada del tipo R_Y ,[1], [4] entonces verifica.*

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy = H(d) - H(c)$$

Ejemplo 4.4.1 *Halle la integral definida de una función $f(x) = 3x$ limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 7$ que representa un lote de terreno en la ciudad de Puerto Maldonado (x:10metros).*

Solución:

La representación gráfica del lote de terreno limitada por las curvas limitadas es:
Sea la integral $A = \int_2^7 [f(x)]dx = \int_2^7 [3x]dx = \frac{3x^2}{2}|_2^7 = F(7) - F(2)$

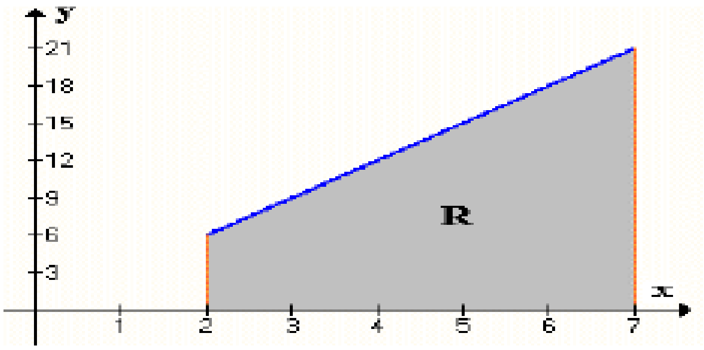


Figura 4.8: Integral definida Tipo R_X

$$A = \int_2^7 [f(x)]dx = \frac{3x^2}{2}|_2^7 = \frac{3(7)^2 - 3(2)^2}{2} = 6750 \text{ metros cuadrados.}$$

La variable de integración es múltiplo de 10 unidades, entonces el área total del terreno es: $A = 7500$ metros cuadrados.

Ejemplo 4.4.2 *Calcule el área de la región de terreno agrícola en la comunidad La Joya en la ciudad de Puerto Maldonado limitada por las curvas $y = x^3 + x + 3$, el eje x y las rectas verticales $x = -1$, $x = 2$ seas múltiplos de 10 unidades. Por lo tanto las variables $y(10m)$ y $x(10m)$.*

Solución:

La representación gráfica del terreno agrícola es:

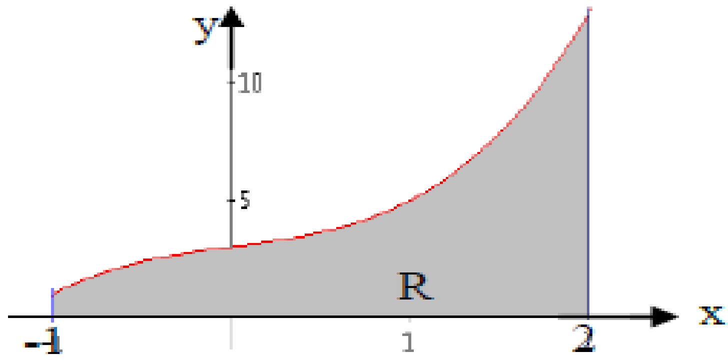


Figura 4.9: Integral definida Tipo R_X

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2}[f(x)]dx = \int_{-1}^{2}[x^3+x+3]dx = (\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+3x)|_{-1}^{2} \\
&= \int_{-1}^{2}[f(x)]dx = (\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+3x)|_{-1}^{2} = F(2)-F(-1) \\
&= \int_{-1}^{2}[f(x)]dx = [(4+2+6)-(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-3)] = \frac{57}{4} \\
&= \int_{-1}^{2}[f(x)]dx = \frac{57}{4} = 1425 \text{ metros cuadrados}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.3 *Calcule el área de la region limitada por las curvas C_1: $y = x^3-3x+8$, C_2: $y = -3x$ y las rectas $x = -3$, $x = 3$, la figura es un terreno de frutales.*

Solución:

Hallemos el punto de intersección de las dos curvas: $x^3 - 3x + 8 = -3x$ entonces $x^3 = -8$, $x = -2$m y $y(-2) = 6$m utilizamos la integral por fracciones, esto es.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{3}[f(x)]dx = \int_{-3}^{-2}[f(x)]dx + \int_{-2}^{3}[f(x)]dx \\
&= \int_{-3}^{3}[f(x)]dx = \int_{-3}^{-2}[-3x-x^3+3x-8]dx + \int_{-2}^{3}[x^3-3x+8-3x]dx \\
&= \int_{-3}^{3}[f(x)]dx = \int_{-3}^{-2}[-x^3-8]dx + \int_{-2}^{3}[x^3-6x+8]dx \\
&= \int_{-3}^{3}[f(x)]dx = (\frac{-x^4}{4}-8x)|_{-3}^{-2} + (\frac{x^4}{4}-3x^2+8x)|_{-2}^{3}
\end{aligned}$$

Haciendo las operaciones aritméticas y algebraicas se tiene el área del terreno de frutales, es $A = \dfrac{99}{2} = 49.50$ metros cuadrados.

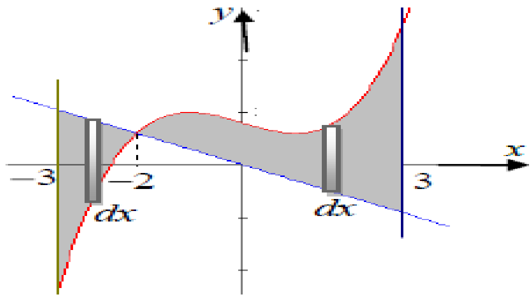


Figura 4.10: Integral definida Tipo R_X

Ejemplo 4.4.4 *Calcule el área de la región limitada por las curvas* $y = \dfrac{6x-20}{(3-x)(x^2+4)}$ *y las rectas* $y = \dfrac{5x+20}{2}$, $y = -9 + 28.3(x+2.2)$, $x = -4.2$, $x = 1.85$ *que representa el espejo de agua de Laguna en la comunidad de Tres Islas en la ciudad de Puerto de Maldonado.*

Solución:

Hallando los puntos de intersección de la curva y las rectas respectivas tenemos: $x = -2.2$, $x = -1.67$

El área total es: $A_T = A_1 + A_2 + A_3$

Usando la propiedad de linealidad de integral definida en el intervalo $[-4.2, 1.85]$ cada una de las funciones restricciones son también integrables en los subintervalos establecidos y contenidos en $[-4.2, 1.85]$ y resulta.

$$\begin{aligned}
A_T &= A_1 + A_2 + A_3 \\
A_T &= \int_{-4.2}^{-2.2} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-2.2}^{-1.76} [g(x) - h(x)]dx + \int_{-1.67}^{1.85} [f(x) - g(x)]dx \\
A_T &= \int_{-4.2}^{-2.2} [2.5(x+4) - \frac{6x-20}{(3-x)(x^3+4)}]dx + \int_{-2.2}^{1.76} [2.5x + 10 - 28.2x - 53.3]dx + \\
&\quad \int_{-1.67}^{1.85} [2.5x + 10 - \frac{6x-20}{(3-x)(x^3+4)}]dx \\
A_T &= \int_{-4.2}^{-2.2} [2.5x + 10 - \frac{6x-20}{(3-x)(x^3+4)}]dx + \int_{-2.2}^{-1.76} [-25.7x - 43.3]dx + \\
&\quad \int_{-1.67}^{1.85} [2.5x + 10 - \frac{6x-20}{(3-x)(x^3+4)}]dx
\end{aligned}$$

Representación gráfica de las funciones que limitan el espejo de agua de la laguna de Tres Islas:

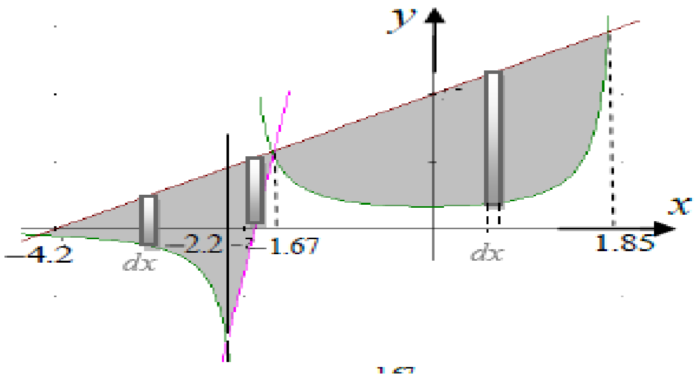


Figura 4.11: Integral definida Tipo R_X

A continuación con respecto al proceso de integración y uso de propiedades de fracciones parciales se tiene.
$\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}=\dfrac{A(x^2+4)+(Bx+C)(3-x)}{(3-x)(x^2+4)}$[0.2cm] $A(3-x)+(Bx+C)(x^2+4)=5x+20$ entonces resolviendo el sistema de ecuaciones resulta: $A=B=-\dfrac{5}{13}$, $C=-\dfrac{80}{13}$, ahora reemplazando estos valores en la integración definida y hallamos el área del espejo de agua:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-4.2}^{-2.2}[2.5x+10-\frac{6x-20}{(3-x)(x^2+4)}]dx\\
A_1 &= \int_{-4.2}^{-2.2}[2.5x+10+\frac{5}{13(3-x)}+\frac{\frac{5x}{13}+\frac{80}{13}}{x^2+4}]dx\\
A_1 &= [\frac{2.5x^2}{2}+10x-\frac{5}{13}.ln(3-x)+\frac{5}{26}.ln(x^2+4)+\frac{40}{3}.arctan(\frac{x}{2})]|_{-4.2}^{-2.2}\\
A_1 &= F(-2.2)-F(-4.2)=-652.358+880.393=228.034 \text{ metros cuadrados}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-2.2}^{-1.76}[-25.7x-43.3]dx=(-12.5x^2-43.3x)|_{-2.2}^{-1.76}=G(-1.67)-G(-2.2)\\
&= G(-1.67)-G(-2.2)=37.488-34.74=2.728 \text{ metros cuadrados}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \int_{-1.67}^{1.85}[2.5x+10-\frac{6x-20}{(3-x)(x^2+4)}]dx \\
&= 1.25x^2+10x+\int_{1.67}^{1.85}[\frac{5}{13(3-x)}+\frac{\frac{5x}{13}+\frac{80}{13}}{x^2+4}]dx \\
&= 1.25x^2+10x-\frac{5}{13}\ln(3-x)+\int_{-1.67}^{1.85}[\frac{5x}{13(x^2+4)}+\frac{80}{13(x^2+4)}]dx \\
&= 1.25x^2+10x-\frac{5}{13}\ln(3-x)+\frac{5}{26}\ln(x^2+4)+\frac{40}{13}\arctan(\frac{x}{2}) \\
&= H(1.85)-H(-1.76) = 593.17-518.01 = 75.202 \text{ metros cuadrados}
\end{aligned}
$$

El área total del espejo de agua es: $A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 305.964$ metros cuadrados

Ejemplo 4.4.5 *Halle el área de la region limitada entre las curvas C_1: $y = x^2+x+2$ múltiplo de 10 y la curva C_2: $y = 2x^2+x-3$ múltiplo de 10, un apicultor diseña una piscigranja para crianza de gamitanas en la localidad de Mazuco de la región de Madre de Dios.*

Solución:

Presentamos el espejo de agua de la piscigranja para crianza de gamitanas en Mazuco.

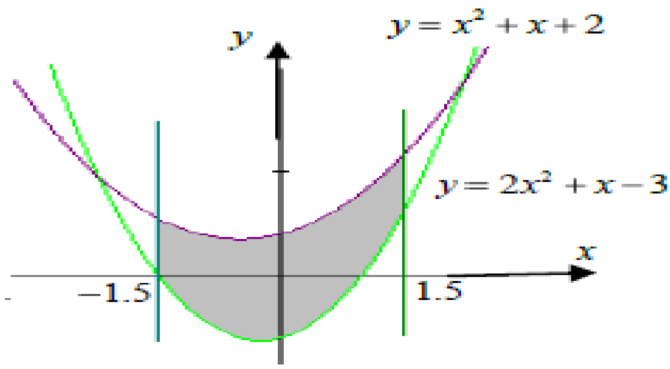


Figura 4.12: Integral definida Tipo R_X

Sea el área total

$$\begin{aligned}
A_T &= \int_{-1.5}^{1.5}[f(x)-g(x)]dx = \int_{-1.5}^{1.5}[(x^2+x+2)-(2x^2+x-3)]dx \\
&= \int_{-1.5}^{1.5}[f(x)-g(x)]dx = \int_{-1.5}^{1.5}[(x^2+x+2)-(2x^2+x-3)]dx \\
&= \int_{-1.5}^{1.5}[-x^2+5]dx = (-\frac{x^3}{3}+5x)|_{-1.5}^{1.5} \\
&= (-\frac{x^3}{3}+5x)|_{-1.5}^{1.5} = F(1.5)-F(-1.5) = 1275 \text{ metros cuadrados}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.6 *Calcule la integral definida de:* $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3+4x^2+3x+16}{x^2+2x+5}$

Solución:

Uso de la división euclidiana $\displaystyle\frac{x^3+4x^2+3x+16}{x^2+2x+5} = x+2+\frac{-6x+6}{x^2+2x+5}$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 f(x)dx &= \int_1^3 (x+2) - 3\int_1^3 \frac{2x+2-2}{x^2+2x+5}dx \\
\int_1^3 f(x)dx &= (\frac{x^2}{2}+2x)|_1^3 - 3\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + 6\int_1^3 \frac{1}{(x+2)^2+1}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= [\frac{x^2}{2}+2x-3ln(x^2+2x+5)+3\arctan(\frac{x+1}{2})]|_1^3 = F(3)-F(1) \\
I &= F(3)-F(1) = 8-3\ln(\frac{2}{5})+3\arctan(2)-\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.7 *Halle la integral definida de:* $\displaystyle\int_2^5 \frac{x-7}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$

Solución:

Hacemos cambio de variable $u = x^2-4x+13$ entonces $du = (2x-4)dx$

$$\int_2^5 \frac{x-7}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{2x-14}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{2x-4-10}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx - 5\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{du}{\sqrt{u}} - 5\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx
\end{aligned}$$

Hacemos cambio de variable para el segundo término $x^2-4x+13 = 9+(x-2)^2$, ahora sea $x-2 = 3tan(z)$ y su diferencial es $dx = 3sec^2(z)dz$, por lo tanto $\sqrt{x^2-4x+13} = \sqrt{9+(x-2)^2} = 3csec(z)$.Luego hagamos cambio de limites de integración para el segundo término, esto es:

Si $x = 2$ entonces $tan(z) = 0$ entonces $z = 0$

Si $x = 5$ entonces $3tan(z) = 3$ entonces $z = \pi/4$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{x^2-4x+13}|_2^5 - 5\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 z dz}{\sec z} \\ &= \sqrt{x^2-4x+13}|_2^5 - 5\ln(\sec z + \tan z)|_0^{\pi/4} \\ &= \sqrt{18} - 3 - 5\ln(3) + \ln(1) = \sqrt{18} - 3 + 5\ln(\frac{1}{5}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.8 *Calcule la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^6 5x dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^6 5x dx &= \int_0^{\pi/4} \tan^4 5x \tan^2 5x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^4 5x[\sec^2 5x - 1]dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^4 5x \sec^2 5x dx - \int_0^{\pi/4} \tan^2 5x[\sec^2 5x - 1]dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^4 5x \sec^2 5x dx - \int_0^{\pi/4} \tan^2 5x \sec^2 5x dx + \int_0^{\pi/4} \tan^2 5x dx \end{aligned}$$

Hagamos cambio de variable, $u = 5x$ entonces $du = 5dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^6 5x dx &= \frac{\tan^5 u}{25} - \frac{\tan^3 u}{15} + \frac{\tan u}{5} - \frac{u}{5} \\ &= [\frac{\tan^5 5x}{25} - \frac{\tan^3 5x}{15} + \frac{\tan 5x}{5} - x]|_0^{\pi/4} \\ &= [\frac{\tan^5 5x}{25} - \frac{\tan^3 5x}{15} + \frac{\tan 5x}{5} - x]|_0^{45^\circ} \\ &= F(45^\circ) - F(0^\circ) = \frac{23}{25} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.9 *Halle la integral definida* $\displaystyle\int_1^2 \frac{(2-x)}{\sqrt{x^2+10x+21}}dx$

Solución:

Hacer cambio de variable $u = x^2+10x+21$ entonces $du = (2x+10)dx$ reemplazando, además dividiendo y multiplicado por 2; cambio de limites de integración y se tiene: Si $x = 1$ entonces $u_0 = 32$, si $x = 2$ entonces $u_1 = 45$

$$\int_1^2 \frac{(2-x)}{\sqrt{x^2+10x+21}}dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2x-4)}{\sqrt{x^2+10x+21}}dx$$

Sumando $+10$ y -10 al numerador esto es, $2x - 4 + 10 - 10 = 2x + 10 - 14$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2x+10-14)}{\sqrt{x^2+10x+21}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2x+10)}{\sqrt{x^2+10x+21}}dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(14)}{\sqrt{x^2+10x+21}}dx \end{aligned}$$

Por otro lado, $x^2 + 10x + 21 = (x+5)^2 - 4$ reemplazando tenemos.

$$I = -\frac{1}{2}\int_{32}^{45} \frac{(1)}{\sqrt{u}}du + 7\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2-4}}dx$$

Evaluando en los limites de integración establecidas resulta.

$$\begin{aligned} I &= -\sqrt{u}|_{32}^{45} + 7\ln[x + 5\sqrt{x^2+10x+21}|_1^2 \\ I &= -\sqrt{45} + \sqrt{32} - 7[\ln(2+5\sqrt{45}) - \ln(1+5\sqrt{32})] = 0.308 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.10 *Halle la integral definida* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{6-2x}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx$

Solución:

Hacer cambio de variable $u = 8-4x-4x^2$ entonces $du = (-4-8x)dx = -4(1+2x)dx$. Si $x = 0$, $u_0 = 8$; $x = \frac{1}{2}$, $u_1 = 5$, llamadas limites de integración cambiadas y reemplazando resulta.

$$\int_0^{1/2} \frac{6-2x}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx = -\int_0^{1/2} \frac{2x-6}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx$$

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^{1/2} \frac{2x+1-7}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx \\
&= -\int_0^{1/2} \frac{2x+1}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx + \int_0^{1/2} \frac{7}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx \\
&= \int_8^5 \frac{du}{4\sqrt{u}} + \int_0^{1/2} \frac{7}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{u}|_8^5 + \frac{7}{2}\int_1^2 \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}}dz \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{u}|_8^5 + \frac{7}{2}\operatorname{arc\,sen}(z/3)|_1^2 \\
&= [\frac{1}{2}\sqrt{8-4x-4x^2} + \frac{7}{2}\operatorname{arc\,sen}(\frac{2x+1}{3})]|_0^{1/2} = F(\frac{1}{2}) - F(0) \\
&= F(\frac{1}{2}) - F(0) = -0.296 + \frac{7}{2}[\operatorname{arc\,sen}(\frac{2}{3}) - \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{3})]
\end{aligned}$$

4.4.1. Ejercicios Propuestos

1. Halle la integral definida $\displaystyle\int_{-2.5}^{3} f(x)dx$ limitada por las curvas $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ y las rectas $x = -2.5$ y $x = 3$.
   $\displaystyle\int_{-2}^{5} (x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx = 75$ metros cuadrados.

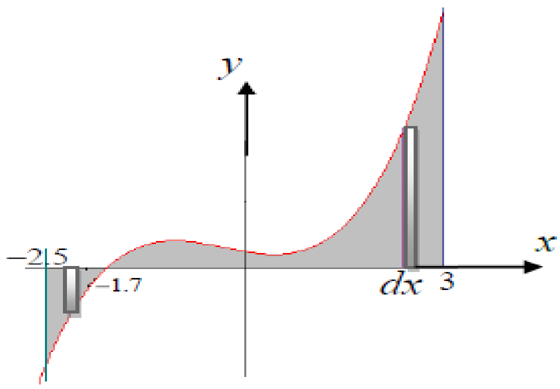


Figura 4.13: Integral definida Tipo R_X

2. Halle la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}\pi + \sqrt{2}\pi}{12}$

3. Halle el área de la región limitada por las curvas $y = 2x - 1$, y las rectas verticales $x = 1$, $x = 5$ entonces $\int_1^5 (2x-1)dx = 20$ metros cuadrados.

4. Halle la integral definida $\int -3/2^{7/2}\sqrt{x^2 - 3x + 8}dx = 5.16$

5. Halle la integral definida limitada por las curvas $y = |x-2|$ y las rectas $x = -2$ y $x = 5$ cuya representación gráfica es:
$\int_{-2}^{5} |x-2|dx = 12.5$ metros cuadrados .

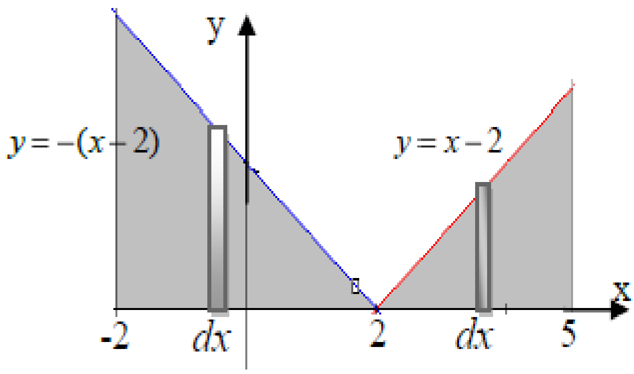


Figura 4.14: Integral definida Tipo R_X

6. Calcule el área limitada por la curva $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ y el eje X , las rectas $x = -3$, $x = 1$, mostrada la figura. $\int_{-3}^{1} f(x)dx = \frac{37}{12}$

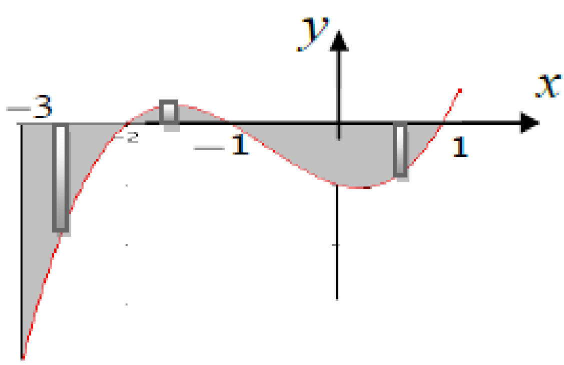


Figura 4.15: Integral definida Tipo R_X

7. Halle la integral definida $\int_0^{\pi} [3\cos^3 x + 2\operatorname{sen} x + 1]dx = 11.85$

8. Halle la integral definida $\int_5^7 \frac{3x+5}{x^2-4x+3}dx = -4\ln(\frac{3}{2}) + 7ln(2)$

9. Halle la integral definida $\int_7^{10} \frac{3x}{x^2-10x+25}dx = 3\ln(\frac{5}{4}) - \frac{1}{4}$

10. Halle la integral definida $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx = \ln(\sqrt{2}+1)$

4.5. Propiedad de extremo absoluto de integral

Definición 4.6 (Propiedad de extremos absolutos de la integral definida) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Si consideramos un valor m denominada valor mínimo absoluto y otro valor máximo absoluto M de la función real $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ entonces cumple la siguiente desigualdad $m \leq f(x) \leq M$ y verifica la desigualdad de área.*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

la integral definida está comprendida en el área rectangular de menor $m(b-a)$ y el área rectangular a mayor $M(b-a)$.

Representación gráfica:

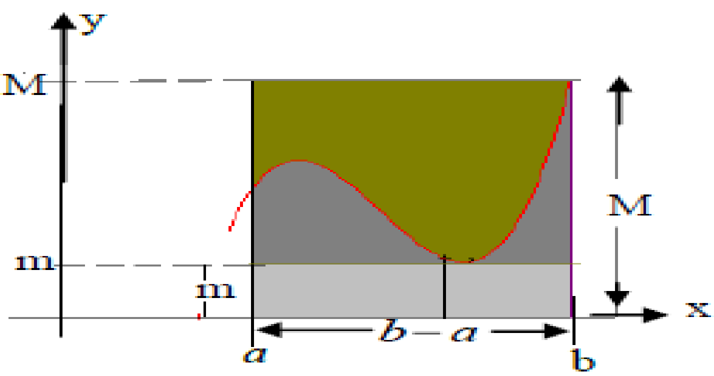


Figura 4.16: Extremo absoluto de la integral definida

Ejemplo 4.5.1 *Halle los extremos absolutos de la integral definida* $\int_3^5 (5x+3)dx$

Solución:

La función integrando es positiva $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [2, 5]$, además mediante uso de la regla de derivación $f'(x) = 5$ existe y es positiva , pero no tiene puntos críticos y la integral definida es:

$$\int_3^5 (5x+3)dx = [\frac{5x^2}{2} + 3x]|_3^5 = 40 \text{ unidades cuadráticas.}$$

Hallemos la imagen de $x = 3$ entonces $f(3) = (5x+3)|_3 = 18$unidades
Hallemos la imagen de $x = 5$ entonces $f(5) = (5x+3)|_5 = 28$unidades
Usamos la propiedad de extremos absolutos de integral definida y esto es:
$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$18(5-3) \leq \int_a^b f(x)dx \leq 28(5-3)$ entonces $36 \leq \int_a^b f(x)dx \leq 56$ unidades cuadráticas. Se nota claramente $36 \leq 46 \leq 56$ unidades cuadráticas.
Representación gráfica de extremos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $x \in [3, 5]$ y $y \in [36, 56]$.

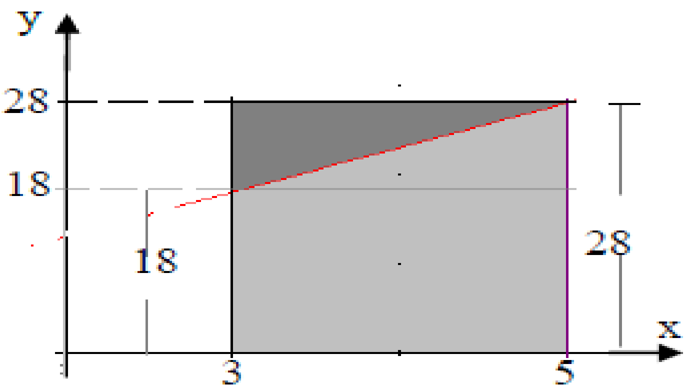


Figura 4.17: Extremos absolutos de la integral

Ejemplo 4.5.2 *Halle los extremos absolutos de la integral definida* $\int_{-1}^4 \sqrt{5+x}dx$

Solución:

La función integrando $f(x) = \sqrt{5+x}$ entonces $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [-5, \infty\rangle$ continua y en particular $f(x)$ es continua en $[-1, 4]$. Según las reglas de derivación tenemos $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5+x}}$ no existe en $x = -5$, es infinitamente diferenciable en toda

la recta real excepto $x = -5$, pero existe un punto critico de la función radical y esto es, $x = -5$.En cada punto extremo del intervalo cerrado hallamos las imágenes respectivas y son los siguientes valores numéricos.
Hallemos la imagen de $x = -1$ entonces $f(-1) = 2$ unidades
hallemos la imagen de $x = 4$ entonces $f(4) = 3$ unidades

La integral definida es: $\displaystyle\int_{-1}^{4} \sqrt{5+x}dx = \int_{4}^{9} \sqrt{u}du = \frac{38}{3}$

Uso de la propiedad de extremos relativos de integral definida:

$2(4+1) \leq \displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)dx \leq 4(4+1)$ entonces $10 \leq \displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)dx \leq 20$ unidades cuadráticas. Se claramente $10 \leq 12.66 \leq 20$ unidades cuadráticas.
Representación gráfica de extremos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $x \in [-1, 4]$ y $y \in [10, 20]$.

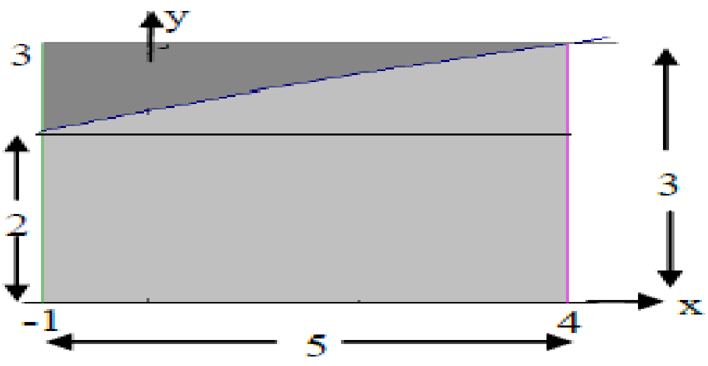


Figura 4.18: Extremo absoluto de la integral definida

Ejemplo 4.5.3 *Calcule los extremos absolutos de la integral definida* $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x dx$

Solución:
La función integrable $f(x) = \operatorname{sen} x$ es positiva en todo $x \in [\pi/6, \pi/3]$, esto es, $f(x) \geq 0$, además por regla de derivación $f'(x) = \cos x$ existe y resulta cero en $x = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ cuando $k \in \mathbb{Z}$, no hay puntos críticos de la función $f(x)$.
Hallamos la imagen de $x = \pi/6$ entonces $f(\pi/6) = \operatorname{sen}(\pi/6) = \dfrac{1}{2}$
Hallamos la imagen de $x = \pi/3$ entonces $f(\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Utilizamos la propiedad de extremos absolutos de la integral definida.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\pi/3 - \pi/6] &\leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen}(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}[\pi/3 - \pi/6] \text{ entonces} \\
\pi/12 &\leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)dx \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \text{ unidades}
\end{aligned}$$

Por su puesto: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen}(x)dx = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

4.6. Teoremas clásicos del cálculo integral

Teorema 4.6.1 (Teorema fundamental del cálculo integral definida) *Sea una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $I = [a, b]$ las siguientes afirmaciones sobre la función primitiva $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

1. Si $F(x)$ es una integral indefinida de $f(x)$. esto es, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que la integral
   $F(x) = F(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ para todo $x \in [a, b]$.

2. La función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, esto es, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

3. Sea la función $f : I \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, esto es, tiene derivada continuas en todo los puntos del intervalo entonces $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x F'(t)dt.$

   Caso si $F'(x) = f(x)$ entonces verifica: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, llamada integral de I. Barrow

Teorema 4.6.2 (Integración por partes) *Sean las funciones continuas e integrables sobre el intervalo $[a, b]$, esto es, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tienen derivadas de clase uno,integrables entonces:*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

Teorema 4.6.3 (Fórmula del valor medio para integrales) *Sean funciones $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$, la función $f(x)$ es continua y la función $p(x)$ integrable con $p(x) \geq 0$ para*

todo $x \in [a, b]$.
Entonces existe un número $c \in \langle a, b\rangle$ tal que la integral definida verifica

$$\int_a^b f(x).p(x)dx = f(c)\int_a^b p(x)dx$$

Si $p(x) = 1$ entonces verifica $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ llamada teorema de valor medio.

Si la integral de valor medio $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ con $f(x) \geq 0$ para algún punto $c \in [a, b]$.
La representación gráfica del teorema de valor medio para una integral definida $f(x) \geq 0$ en todo punto de $x \in [a, b]$ y esto es:

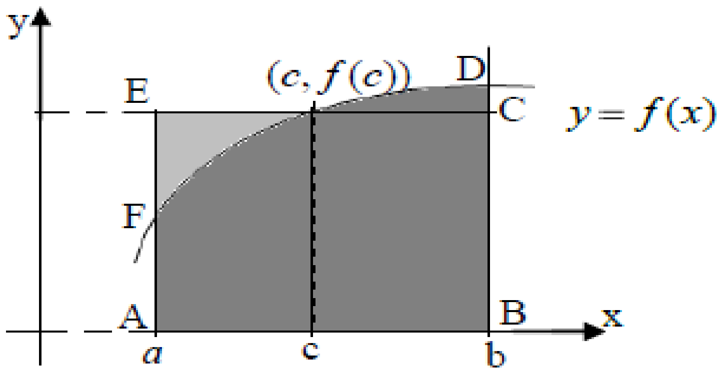


Figura 4.19: Integral de valor medio

Se toma el área de la región limitada por la función integrable positiva para todo $x \in [a, b]$ y las rectas $x = a$, $x = b$ sobre el eje X, se observa claramente existe un valor numérico $c \in [a, b]$ de tal modo el área del rectángulo $ABCEFA$tiene altura $h = f(c)$ y la base del rectángulo es $b - a$, es igual al área de la región $ABCDFA$ bajo la curva de la función $f(x)$ y limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje X.

Ejemplo 4.6.1 *Encuentre el valor de c de modo que satisfaga el teorema de valor medio para la integral definida de* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_0^3 x^2dx = 9$

Solución:
Uso del teorema de valor medio: $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ entonces tomando los limites

de integración $\int_0^3 x^2 dx = f(c)(3-0)$ entonces $9 = c^2.3$ entonces $c = \pm\sqrt{3}$, vemos que $-\sqrt{3}$ no pertenece al intervalo $[0,3]$, pero $\sqrt{3}$ si pertenece al intervalo $[0,3]$.

Como $\int_0^3 x^2 dx = f(\sqrt{3})(3-0)$ y su representación gráfica de la función integrable $f(x)$.

El área de la region sombreada de color negro , es decir limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas definidas $x = 0$ y $x = 3$ es idéntica al área rectangular y cuya medida es $A = 9$ unidades cuadráticas y del mismo la integral definida $\int_0^3 x^2 dx = 9$ unidades cuadráticas.

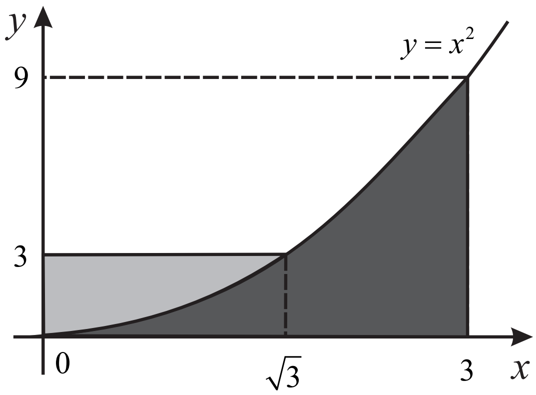


Figura 4.20: Integral de valor medio

Ejemplo 4.6.2 *Determine el valor de c que satisfaga la condición del teorema de valor medio para la integral definida* $\int_{-2}^{3} [x^3 + 2x - 3]dx = 18.25$ *unidades cuadráticas.*

Solución:

Utilizamos la fórmula del teorema de valor medio y los limites de integración, puesto que $c \in [-2,3]$:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{3} [x^3 + 2x - 3]dx &= (3+2)f(c)dx, \text{ por la condición del problema} \\ \int_{-2}^{3} [x^3 + 2x - 3]dx &= 18.3 \end{aligned}$$

$18.3 = (5)f(c) = 5[c^3 + 2c - 3]$ entonces $c^3 + 2c - 6.82 = 0$, así $c = 1.22 \in [-2,3]$ los demás raíces no son números reales, por consiguiente se tiene, el teorema de valor medio de la función en $[-2, 3]$

$$\int_{-2}^{3} [x^3 + 2x + 3]dx = f(1.22)(3 + 2)$$

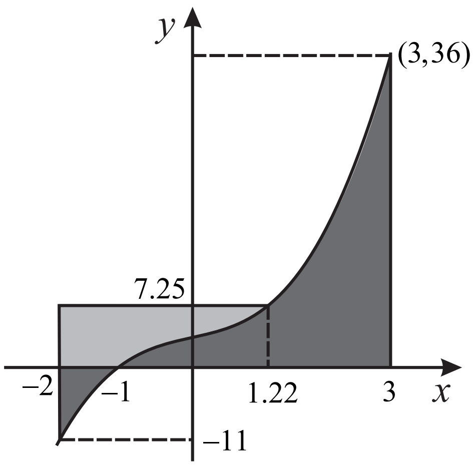


Figura 4.21: Integral de valor medio

Ejemplo 4.6.3 *Halle el valor de c de modo que satisfaga el teorema de valor medio en la integral definida* $\int_{4}^{7} \sqrt{x-3}dx = \frac{14}{3}$ *unidades cuadráticas.*

Solución:

La representación gráfica es:

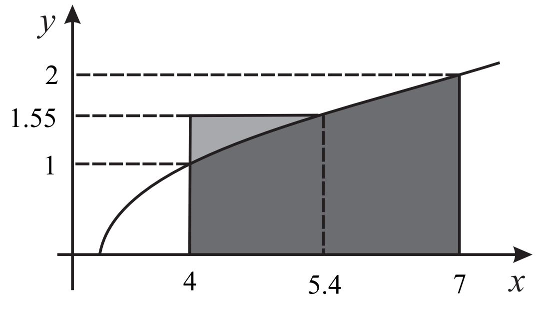


Figura 4.22: Integral de valor medio

Utilizamos la fórmula del teorema de valor medio y los limites de integración, puesto que $c \in [-2, 3]$

$\int_4^7 \sqrt{x-3}dx = (7-4)f(c)dx$, por la condición del problema $\int_4^7 [\sqrt{x-3}]dx = 4.66$

$4.67 = (3)f(c) = 3\sqrt{c-3}$ entonces $\sqrt{c-3} = 1.556$, entonces $c = 5.41 \in [4,7]$ es única, por consiguiente se tiene, el teorema de valor medio de la función en $[4,7]$:
$\int_4^7 \sqrt{x-3}dx = f(5.41)(7-4)$ y la representación gráfica es:

Observación:
Sea la función $f(x)$ integrable y continua sobre $[a,b]$, la integral definida desde un número a llamada límite de integración inferior hasta un limite de integración variable que es función de x entonces el teorema fundamental del cálculo es:
$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ entonces $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$
Llamada derivación bajo el signo integral.
Sean los limites de integración $a = h(x)$, $b = g(x)$ derivables e integrables en el intervalo $[a,b]$ entonces verifica

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt + f(b,x)\frac{d(b(x))}{dx} - f(a,x)\frac{d(a(x))}{dx}$$

Uso de la regla de cadena $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt = H(g(x))$ entonces $F'(x) = H(g(x)) \cdot g'(x)$

Ejemplo 4.6.4 *Halle la derivada de la función primitiva, bajo la derivación bajo el signo integral*

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{3}{2+\operatorname{arc\,sen} t}dt$$

.

Solución:
Uso de la fórmula de derivación bajo el signo de integración.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)dt + f(\operatorname{sen} x, x)\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} - f(0,x)\frac{d(0)}{dx} \\ &= \frac{3}{2+\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2+\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)}\cos x = \frac{3\cos x - 3x}{4x+2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.5 *Halle la derivada de $F'(x)$ en la integral definida*

$$F(x) = \int_0^{x^3} \sqrt{3t + 2t^2 + (\exp)^{2t}} dt$$

Solución:

Uso de la fórmula de derivación bajo el signo integral

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{x^3} \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{3t + 2t^2 + (\exp)^{2t}} dt + f(x^3, x)3x^2 + f(0, x).0 \\ &= \sqrt{3x^3 + 2x^6 + (\exp)^{2x^3}} + \sqrt{3x^3 + 2x^6 + (\exp)^{2x^3}} 3x^2 \\ &= \sqrt{3x^3 + 2x^6 + (\exp)^{2x^3}} [\sqrt{1 + 3x^2}] \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.6 *Halle la función continua en toda la recta real y verifica* $F(x) = \int_0^{x^2-3} f(t)dt = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2$

Solución:

Utilizamos la regla de la cadena $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt = H(g(x)$ entonces tenemos $F'(x) = H(g(x)) \cdot g'(x)$ $F'(x) = H(x^2 - 3)(2x) = 12x^5 + 12x^3 + 12x$ entonces la antiderivada es $F'(x) = f(x)$

Luego $H(x^2 - 3) = 6x^4 + 6x^2 + 6$ hacemos cambio de variable $x^2 - 3 = z$ entonces $x^2 = z + 3$, $x^4 = z^2 + 6z + 9$

$H(z) = 6(z^2 + 6z + 9) + 6(z + 3) + 6$ entonces $H(z) = 6z^2 + 42z + 78$

$f(z) = H(z)(2\sqrt{z + 3}) = (12z^2 + 84z + 156)\sqrt{z + 3}$ hacemos cambio de variable $x \equiv z$

$f(x) = (12x^2 + 84x + 156)\sqrt{x + 3}$

Ejemplo 4.6.7 *halle la primera derivada de la función*

$$F(x) = \int_{x^3}^{x^2-3} \frac{t}{t^2 + 3cost + 10} dt$$

Solución:

Uso de $F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt + f(b,x)\frac{d(b(x))}{dx} - f(a,x)\frac{d(a(x))}{dx}$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_{x^3}^{x^2-2} \frac{\partial}{\partial t}\frac{t}{t^2+3\cos t+10}dt + f(x^3-3,x)\frac{d(x^2-3)}{dx} - f(x^3,x)\frac{d(x^3)}{dx}\\
&= \frac{t}{t^2+3\cos t+10}\Big|_{x^3}^{x^2-3} + f(x^2-3,x)\frac{d(x^2-3)}{dx} - f(x^3,x)\frac{d(x^3)}{dx}\\
&= \frac{x^2-3}{(x^2-3)^2+3\cos(x^2-3)+10} - \frac{x^3}{x^6+3\cos(x^3)+10} +\\
&\quad \frac{2x(x^2-3)}{(x^2-3)^2+3\cos(x^2-3)+10} - \frac{x^3}{x^6+3\cos(x^3)+10}\\
&= \frac{(x^2-3)(2x+1)}{(x^2-3)^2+3\cos(x^2-3)+10} - \frac{x^3(3x^2+1)}{x^6+3\cos x^3+10}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.8 *Halle la imagen de $h(2)$ en la integral definida*

$$F(x) = \int_0^{h(x)} t^2 dt = x^4+3x^3+2x^2$$

Solución:

Usamos la regla de la cadena $F'(x) = H(h(x)).h'(x)$ donde $H(t) = t^2$, $h(x) = g(x)$ entonces $h'(x) = g'(x)$

$F'(x) = h^2(x)h'(x) = 4x^3+9x^2+4x$ entonces $h^2(x)h'(x) = 4x^3+9x^2+4x$ hacemos proceso de integración para calcular la función $h(x)$, esto es: $h^2(x)h'(x) = 4x^3+9x^2+4x$ entonces $h^2(x)dh(x) = (4x^3+9x^2+4x)dx$

$h^2(x)dh(x) = (4x^3+9x^2+4x)dx$ entonces $\frac{h^3(x)}{3} = x^4+3x^3+2x^2+C$

$\frac{h^3(x)}{3} = x^4+3x^3+2x^2+C$ entonces $h(x) = \sqrt[3]{x^4+3x^3+2x^2+C}$

Reemplazando $x=2$ entonces $h(2) = \sqrt[3]{x^4+3x^3+2x^2+C}|_2 = \sqrt[3]{144+C}$

Ejemplo 4.6.9 *Calcule la integral definida:* $\int_{-2}^{1} \frac{x^3+6x^2+11x}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx$

Solución:

Sea $\sqrt{x^2+4x+13} = \sqrt{(x+2)^2+9} = 3\sec x$.

Si $x+2 = 3\tan z$ entonces $dx = 3\sec^2 z dz$

Si $x^3 = (3\tan z - 2)^3 = 27\tan^3 z - 54\tan^2 + 36\tan z - 8$ y

si $x^2 = (3\tan z - 2)^2 = 9\tan^2 z - 12\tan z + 4$, y $11x = 33\tan z - 22$

Además cambio de variable de limites de integración: $x = -2$, $z = 0$; $x = 1$ entonces $z = \pi/4$

Sea $x^3 + 6x^2 + 11x = 27\tan^3 z - 3\tan z - 6$ reemplazando éstos valores tenemos.

$$\int_{-2}^{1} \frac{x^3 + 6x^2 + 11x}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} dx = \int_{-2}^{1} \frac{x^3 + 6x^2 + 11x}{\sqrt{(x+2)^2 + 9}} dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \frac{27\tan^3 z - 3\tan z - 6}{\sqrt{9\tan^2 z + 9}} 3\sec^2 z dz \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{27\tan^3 z - 3\tan z - 6}{3\sec z} 3\sec^2 z dz \\
&= \int_0^{\pi/4} (27\tan^3 z - 3\tan z - 6)\sec z dz \\
&= 27\int_0^{\pi/4} \tan^3 z \sec z dz - 3\int_0^{\pi/4} \tan z \sec z dz - 6\int_0^{\pi/4} \sec z dz
\end{aligned}$$

Utilizado propiedades de integración de funciones trigonométricas directas y resulta:

$$\begin{aligned}
I &= [9\sec^3 z - 30\sec z - 6\ln(\sec z + \tan z)]|_0^{\pi/4} = F(\pi/4) - F(0) \\
&= F(\pi/4) - F(0) = 21 + 6\sqrt{2} - 6\ln(\sqrt{2} + 1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.10 *Halle la integral definida de:* $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

Solución:

Hacer cambio de variable de integración, m.c.m de índices radicales y cambio de límites de integración:

Sea $z^8 = x$ entonces $z^4 = \sqrt{x}$, $z^2 = \sqrt[4]{x}$ y $dx = 8z^7 dz$. Si $x = 0$, $z = 0$; $x = 16$, $z = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= 8\int_0^{\sqrt{2}} \frac{z^7 dz}{z^4 + z^2} = 8\int_0^{\sqrt{2}} [z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}] dz \\
&= \frac{8z^4}{4} + \frac{8z^2}{2} + \frac{8}{2}.\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2z dz}{z^2 + 1} \\
&= [8\frac{z^4}{4} + 8\frac{z^2}{2} + 8\frac{1}{2}.\ln(z^2+1)]|_0^{\sqrt{2}} \\
&= F(\sqrt{2}) - F(0) = 4\ln(3)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.11 *Halle la integral definida de* $\displaystyle\int_1^{64} \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

Solución:

Hacer cambio de variable de integración , m.c.m y cambio de límites de integración , esto es:

Sea $z^6 = x$, $z^3 = \sqrt{x}$, $z^2 = \sqrt[3]{x}$; si $x = 0$, $z = 0$, $x = 64$ entonces $z = 2$ y $dx = 6z^5dz$

$$\int_1^{64} \frac{2\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{12z^7dz}{z^3+z^2} = \int_1^2 \frac{12z^5dz}{z^2+1}$$

$$\begin{aligned} 12\int_1^2 \frac{z^5}{z+1}dz &= 12\int_1^2 [z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}]dz \\ &= 12[\frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}z + z - \ln(z+1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{64} \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx &= 12[\frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}z + z - \ln(z+1)]|_1^2 \\ &= F(2) - F(1) = 15 + 12\ln(\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

4.6.1. Ejercicios Propuestos

1. Halle la derivación bajo el signo integral $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} [t^2 + 5t + 12]dt$

   Respuesta: $F'(x) = (x^4 + 5x^2 + 12)(2x)$

2. Halle la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} [\frac{t^2}{\arccos t + 2t + 14}]dt$

   Respuesta: $F'(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x + 2\cos x + 14}(-\operatorname{sen} x)$

3. Halle la derivada $F(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} [\frac{t^3}{t^2 + 12t + 1}]dt$

   Respuesta: $F'(x) = \dfrac{\tan^3 x \sec^2 x}{\sec^2 x + 12\tan x}$

4. Halle la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_2^{x^2+\tan x} \frac{(\exp)^{2t}}{t^3 + 4t^2 + 13}dt$

   Respuesta: $F'(x) = \dfrac{(\exp)^{2x^2}}{x^6 + 4x^4 + 13}(2x + \sec^2 x)$

5. Halle la derivada $F(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{t^2 + 3t + 2}dt$

   Respuesta: $F'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2} - \dfrac{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x + 3\cos x + 2}$

6. Calcule la función $f(x)$ sea continua derivable sobre la recta real de la integral definida, utilizando la derivación bajo el signo integral: $F(x) = \int_0^{x^2-1} f(t)dt = 2x^4 + 2x^3 + 5x$

7. Halle la integral definida $\int_0^2 \sqrt{16 - x^2}dx = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

8. Halle la integral definida $\int_0^1 \frac{x^3 + 8x^2 + 1}{x^2 + 6x + 13}dx = -4 + 25[\arctan(2) - \arctan(\frac{3}{2})]$

9. Halle la integral definida $\int_0^{\pi/4} x^3 \arctan(3x)dx = \frac{1}{81}[1.54 - \frac{1}{4}\arctan(\frac{3\pi}{4})]$

10. Halle la integral definida $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)dx = \frac{\pi}{144} - \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

11. Halle la integral definida $\int_0^{\pi/18} \cot^3 3x \csc 3xdx = -\frac{76}{45}$

12. Halle la integral definida $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}dx = 15 + 16\ln(2)$

13. Halle la integral definida $\int_{1.2}^3 \frac{x^3 + 4x2 + 3x + 16}{x^2 + 2x + 5} = 6.5 + 0.42\pi$

14. Halle la integral definida $\int_0^{\pi/4} x(\exp)^x \operatorname{sen} xdx = \frac{(\exp)^{\frac{\pi}{4}}}{2}[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1]$

4.7. Aplicación de las integrales definidas

Utilizando la definición y propiedades de integrales definidas es posible calcular el área de la región limitada por dos curvas o el eje X, asi mismo el volumen de una superficie rotacional estableciendo sólidos respecto al eje X o eje Y, además podemos calcular el trabajo realizado por la función de fuerza que requiere para bombear líquido de un estanque hacia arriba o abajo según las condiciones establecidas . Todo éstas aplicaciones al campo de la física, biología, economía, entre otras, es propia aplicación de sumas infinitas de Riemann de funciones continuas, derivables e integrales en intervalo cerrado.

Definición 4.7 (Área limitada entre dos curvas del tipo R_X) *Sean las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables e integrables sobre el* *intervalo $[a, b]$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y limitadas por las rectas verticales $x = a$, $x = b$. El área de la region limitada por las curvas establecidas, es posible particionar en pequeñas áreas elementales o franjas verticales de altura $h = f(c_k) - g(c_k)$ y la base Δx_k entonces el área elemental definida mediante $\Delta A_k = f(c_k) - g(c_k).\Delta x_k$, [7], [8].*

Interpretación geométrica del área de la region limitada por dos curvas y las rectas dadas es:

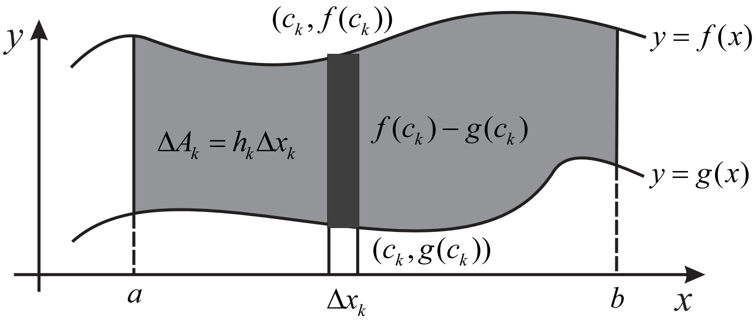


Figura 4.23: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

El área total de la región limitada por dos curvas y las rectas dadas es la suma infinita de areas elementales.

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k, \text{ si } |\Delta x_k| \to 0$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \lim_{|\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k \\ A &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \end{aligned}$$

conocida como integral de I. Barrow del tipo R_X o integral de Riemann.

Definición 4.8 (Área limitada entre dos curvas del tipo R_Y) *Sean las funciones continuas sobre el intervalo $[c, d]$ y $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables e integrables sobre el intervalo $[c, d]$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [c, d]$ y limitadas por las rectas verticales $y = c$, $y = d$. El área de la region limitada por las curvas establecidas, es posible particionar en pequeñas áreas elementales o franjas horizontales de base $B = f(c_k) - g(c_k)$*

y la altura Δy_k *entonces el área elemental definida mediante* $\Delta A_k = f(c_k) - g(c_k).\Delta y_k$ *, [7], [8].*

Interpretación geométrica del área de la region limitada por dos curvas y las rectas dadas es:

El área total de la región limitada por dos curvas y las rectas dadas es la suma

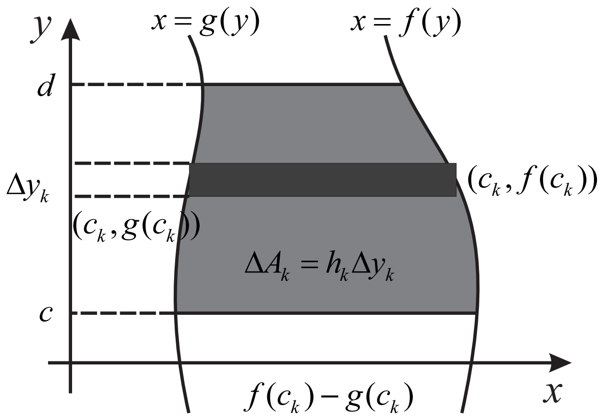


Figura 4.24: Área limitada entre dos curvas tipo R_Y

infinita de areas elementales.

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta y_k, \text{ si } |\Delta y_k| \to 0$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|\Delta y_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \lim_{|\Delta y_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta y_k \\ A &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta y_k = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \end{aligned}$$

conocida como integral de I. Barrow del tipo R_Y o integral de Riemann.

Ejemplo 4.7.1 *Calcule el área de un terreno agrícola de plantas frutales limitada por las curvas* C_1*:* $2x = y^2 - 0.5$ *y* C_2*:* $y = x^2 + 0.2$ *en una escala de* 10 *metros cada una de las curvas dadas y los ejes* X *y el eje* Y

Solución:

1. Hallar los puntos de intersección entre las curvas dadas $C_1 \bigcap C_2$ igualando las variables y y resulta $2x = (x^2 + 0.2)^2 - 0.5$ entonces $x^4 + 0.4x^2 - 2x - 0.4 = 0$,

resolviendo la ecuación $x = -0.22$ y $x = 1.24$. A continuación consideremos un elemento diferencial de área y mostramos el gráfico entre las dos curvas y las rectas.

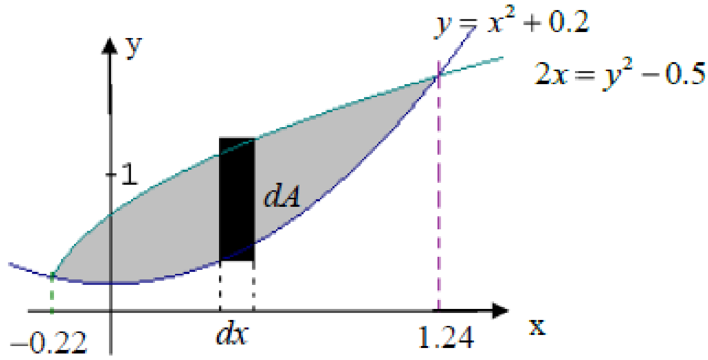


Figura 4.25: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

2. Uso de la fórmula de integral I. Barrow de tipo R_X, $f(x) = \sqrt{2x + 0.5}$ está arriba de $g(x) = x^2 + 0.2$ entonces $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [-0.22, 1.24]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-0.22}^{1.24} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-0.22}^{1.24} [\sqrt{2x + 0.5} - (x^2 + 0.2)]dx \\ &= \int_{-0.22}^{1.24} \sqrt{2x + 0.5}dx - \int_{-0.22}^{1.24} (x^2 + 0.2)]dx \end{aligned}$$

Hacemos cambio de variable de integración $u = 2x + 0.5$ entonces $du = 2dx$ y $u_0 = 0.06$, $u_1 = 2.98$

$$\begin{aligned} A &= \int_{0.06}^{2.98} \frac{1}{2}\sqrt{u}du - \int_{-0.22}^{1.24} (x^2 + 0.2)]dx \\ A &= \frac{u^{3/2}}{3}|_{0.06}^{2.98} - (\frac{x^3}{3} + 0.2x)|_{-0.22}^{1.24} = 78.661\text{m}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.2 *Calcule el área de espejo de luz de una laguna ubicado en la comunidad Descanso de la provincia de Espinar region de Cusco, limitada por las curvas* C_1*:* $2x = y^2 - 3y + 2$ *y* C_2*:* $y = 2x - 7$ *las variables* x *e* y *está en la escala de* $10m$ *cada una de las curvas sobre el eje* X *y* Y*.*

Solución:

1. Hallar los puntos de intersección entre las curvas dadas $C_1 \bigcap C_2$ igualando las variables x y resulta $y = 2x - 7$ en $2x = y^2 - 3y + 2$ entonces $2x = (2x - 7)^2 - 3(2x - 7) + 2$, resulta: $x^2 - 36x + 72 = 0$, resolviendo la ecuación de segundo grado $x = 3$ y $x = 6$, además los valores de $y = -1$, $y = 5$. A continuación consideremos un elemento diferencial de área y mostramos el gráfico entre las dos curvas y las rectas establecidas.

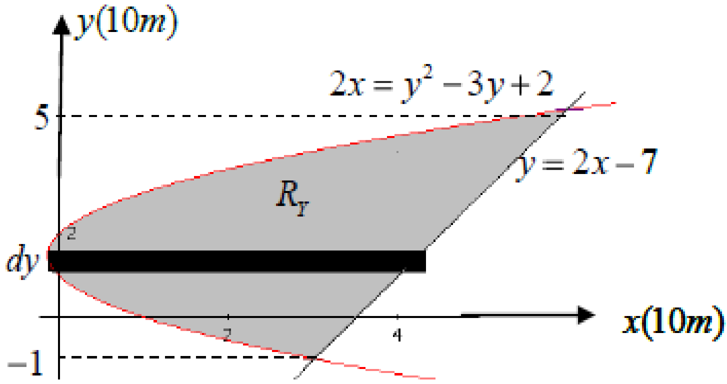


Figura 4.26: Área limitada entre dos curvas tipo R_Y

2. Sea elemento diferencial de área horizontal y los límites de integración son $y = -1$, $y = 5$ metros y usamos la fórmula de integral de Riemann tipo R_Y.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{5} [f(y) - g(y)]dy = \int_{-1}^{5} [\frac{y+7}{2} - \frac{y^2 - 3y + 2}{2}]dy \\
&= \int_{-1}^{5} [\frac{-y^2 + 4y + 5}{2}]dy = \frac{1}{2}[\frac{-y^3}{3} + 2y^2 + 5y]|_{-1}^{5} = H(5) - H(-1) \\
&= \frac{1}{2}[\frac{-y^3}{3} + 2y^2 + 5y]|_{-1}^{5} = H(5) - H(-1) = 1800\text{m}^2
\end{aligned}$$

el espejo de luz del lago sandoval es aproximadamente de 1800 metros cuadrados

Ejemplo 4.7.3 *Calcule el área del terreno agrícola para cultivo de arroz en la comunidad Las Viñas de la ciudad de Puerto Maldonado que es limitada por las curvas* C_1: $x = y^2 - 3y + 2$, C_2: $3x = -2y^2 + 4y + 6$ *las variables están en la escala* 10 *metros los ejes* X *e* Y.

Solución:

1. Hallar los puntos de intersección entre las curvas dadas $C_1 \bigcap C_2$ igualando las variables x y resulta $x = y^2 - 3y + 2$ y $3x = -2y^2 + 4y + 6$ entonces $3(y^2 - 3y + 2) = -2y^2 + 4y + 6$, resulta: $5y^2 - 13y = 0$, resolviendo la ecuación de segundo grado $y = 0$ y $y = 2.6$, además los valores de $x = -1$, $x = \frac{24}{25}$. A continuación consideremos un elemento diferencial de área y mostramos el gráfico entre las dos curvas y las rectas establecidas.

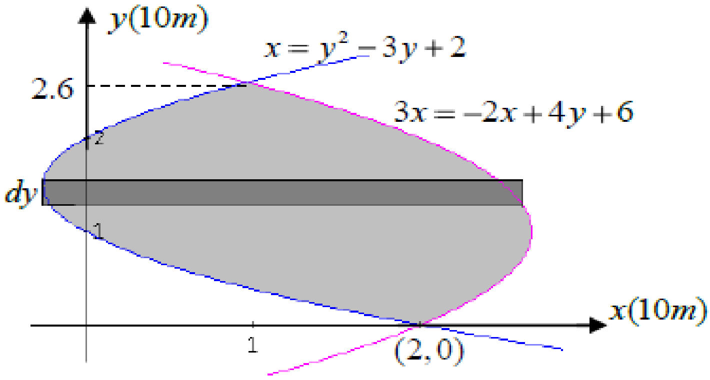


Figura 4.27: Área limitada entre dos curvas tipo R_Y

2. Utilizamos la fórmula de la integral de Riemann de tipo R_Y y esto es:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2.6} [f(y) - g(y)]dy = \int_0^{2.6} [\frac{-2y^2 - 3y + 6}{3} - (y^2 - 3y + 2)]dy \\
&= \int_0^{2.6} \frac{-5y^2 + 13y}{3} dy = \frac{1}{3}[-5\frac{y^3}{3} + 13\frac{y^2}{2}]|_0^{2.6} = 4.882 \\
&= \frac{1}{3}[-5\frac{y^3}{3} + 13\frac{y^2}{2}]|_0^{2.6} = 488.2\text{m}^2
\end{aligned}
$$

esta es el área del terreno de cultivo de arroz en la comunidad de Las Viñas.

Ejemplo 4.7.4 *Calcule el área de fundo de la propiedad de la Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios en la ciudad de Puerto Maldonado que es limitada por las curvas C_1: $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ y C_2: $y = x^3 + 5x^2 - 8$ las variables x e y están en la escala de 100 metros y los ejes coordenadas X e Y.*

Solución:

1. Hallar los puntos de intersección entre las curvas dadas $C_1 \bigcap C_2$ igualando las variables y y resulta $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ además $y = x^3 + 5x^2 - 8$ entonces

$x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = x^3 + 5x^2 - 8$, resulta: $2x^2 + 3x - 10 = 0$, resolviendo la ecuación de segundo grado $x = -3.01$ y $x = 1.61$, además los valores de $y = -0.91$, $y = 0.014$. A continuación consideremos un elemento diferencial de área vertical y mostramos el gráfico entre las dos curvas y las rectas establecidas.

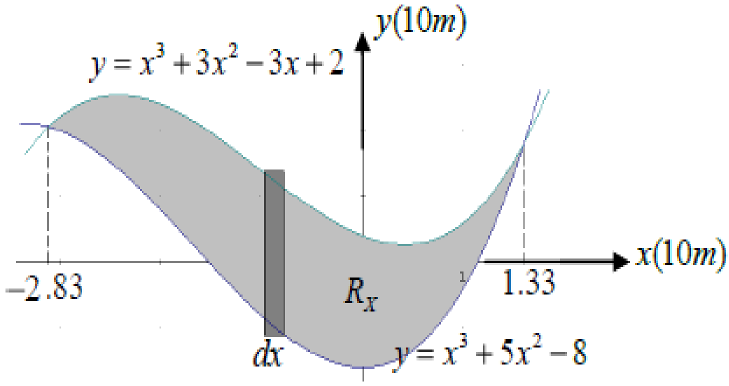


Figura 4.28: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

2. Utilizamos la integral de Riemann de tipo R_X y esto es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3.01}^{1.61} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-3.01}^{1.61} [(x^3 + 3x^2 - 3x + 2) - (x^3 + 5x^2 - 8)]dx \\ &= \int_{-3.01}^{1.61} [-2x^2 - 3x + 10]dx = \frac{-2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 10x|_{-3.01}^{1.61} \\ &= F(1.61) - F(-3.01) = 9.4296 - (-25.509) = 34.939 \text{ Hectáreas} \end{aligned}$$

el fundo del terreno de la Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios es aproximadamente $A = 35$ hectáreas.

Ejemplo 4.7.5 *Calcule el espejo de luz de una laguna en la ciudad de Abancay región Apurimac limitada por las curvas C_1: $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$ y C_2: $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ las variables de x e y están en la escala de 100 metros.*

Solución:

1. Hallar los puntos de intersección entre las curvas dadas $C_1 \bigcap C_2$ igualando las variables y y resulta $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$ además $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ entonces $2x^3 - 3x^2 - 9x = x^3 - 2x^2 - 3x$, resulta: $x^3 - x^2 - 6x = 0$, resolviendo la ecuación cúbica $x = 3$, $x = -2$ y $x = 0$ además los valores de $y = 0$, $y = -10$ y $y = 0$. A

continuación consideremos un elemento diferencial de área vertical y mostramos el gráfico entre las dos curvas y las rectas establecidas.

2. Representación gráfica del espejo de luz de la laguna en la ciudad de Abancay y esto es:

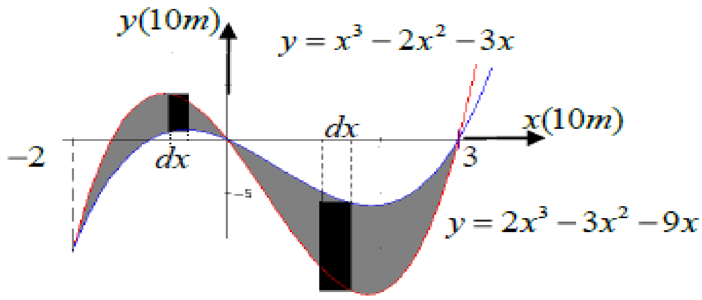


Figura 4.29: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

3. Utilizamos la propiedad de linealidad de una integral definida y esto es:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) - g(x)]dx &= \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx \\
\int_{-2}^3 [f(x) - g(x)]dx &= \int_{-2}^0 [2x^3 - 3x^2 - 9x - (x^3 - 2x^2 - 3x)]dx + \\
&\quad \int_0^3 [x^3 - 2x^2 - 3x - (2x^3 - 3x^2 - 3x)]dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^0 [x^3 - x^2 - 6x]dx + \int_0^3 [-x^3 + x^2 + 6x]dx \\
&= [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2]|_{-2}^0 + [\frac{-x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2] \\
&= [F(0) - F(-2)] + [F(3) - F(0)] = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = 19.62 \text{ Hectáreas de espejo de luz de agua.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.6 *Calcule el área del terreno para lotización de la Asociación Pro Vivienda los Girasoles de La Joya en la ciudad de Puerto Maldonado, limitada por las curvas C_1: $x + 2y = 2$, C_2: $y - x = 1$ y C_3: $y + 2x = 7$ las variables x e y están en la escala de 100 metros.*

Solución:

1. Calculamos los puntos de intersección de las curvas:

   a) Las curvas $C_1 \cap C_2$, esto es, $2x + y = 7$ y $-2x + 2y = 2$ resulta los valores de $x = 2$ y $y = 3$

   b) Las curvas $C_1 \cap C_3$, esto es, $4x + 2y = 14$ y $-x - 2y = -2$ resulta los valores de $x = 4$ y $y = -1$

   c) Las curvas $C_2 \cap C_3$, esto es, $x + 2y = 2$ y $-x + y = 1$ resulta los valores de $x = 0$ y $y = 1$

2. Utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_x divida en dos subregiones A_1 y A_2
   entonces el área total del terreno es: $A = A_1 + A_2$, los puntos de integración son $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx + \int_2^4 [g(x) - g(x)]dx \\ &= \int_0^2 [(x+1) - \frac{2-x}{2}]dx + \int_2^4 [7 - 2x - \frac{2-x}{2}]dx \\ &= \int_0^2 \frac{3x}{2}dx + \int_2^4 [6 - \frac{3x}{2}]dx \\ &= \frac{3x^2}{4}|_0^2 + [6x - \frac{3x^2}{4}]|_2^4 = 120000\text{m}^2 \end{aligned}$$

3. La representación gráfica del terreno de Asociación Pro Vivienda los Girales de la Joya ubicada en la ciudad de Puerto Maldonado.

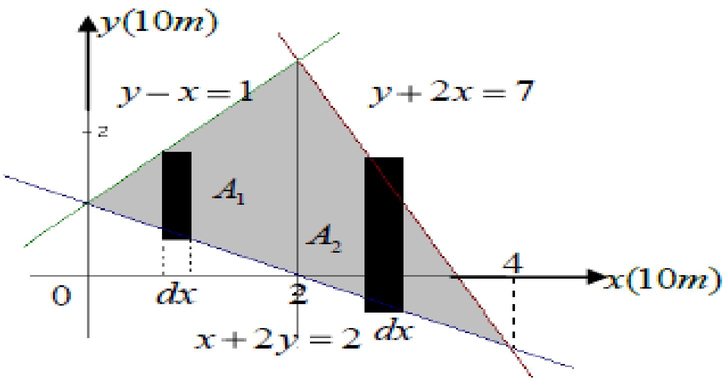


Figura 4.30: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

Ejemplo 4.7.7 *Calcule el área del terreno agrícola de arroz limitada por las curvas C_1: $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, y C_2: $y = x^2 - 4x$ los ejes X y eje Y están en la escala $10m$ la unidad.*

Solución:

1. La representación gráfica del terreno agrícola de arroz en la ciudad de Puerto Maldonado, esto es:

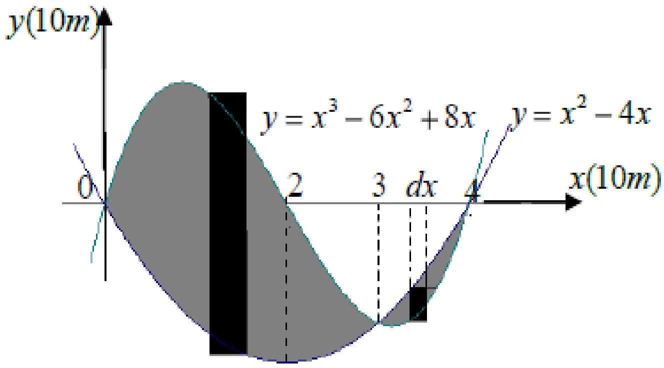


Figura 4.31: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

2. Calcular lo puntos de intersección de las curvas $C_1 \cap C_2$ de las curvas dadas, tenemos igualando la variable y, esto es: $x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$ entonces $x^3 - 7x^2 + 12x = x(x^2 - 7x + 12) = 0$ resolviendo la ecuación cíbica resulta $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$ y utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_X.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx + \int_2^3 [g(x) - f(x)]dx + \int_2^4 [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_0^2 [x^3 - 7x^2 + 12x]dx + \int_2^3 [-x^3 + 7x^2 - 12x]dx + \int_2^4 [x^3 - 7x^2 + 12x]dx \\ &= [\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 6x^2]|_0^2 + [-\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 6x^2]|_2^3 + [\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 6x^2]|_3^4 \end{aligned}$$

3. Evaluando las funciones integrales en los limites de integración respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= [F(2) - F(0)] + [F(3) - F(2)] + [F(4) - F(3)] = \frac{28}{3} + \frac{|-23|}{12} + \frac{|-7|}{12} \\ A &= \frac{28}{3} + \frac{|-23|}{12} + \frac{|-7|}{12} = \frac{142}{12} = 1183\text{m}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.8 *Calcule el área de espejo de luz de una piscigranja diseñado por un piscicultor de peces, para la crianza de gamitanas y palometas limitada por las curvas C_1: $x = y^2$, C_2: $x = 3 - y^2$ las variables de x e y están en la escala $10m$ de una unidad.*

Solución:

Representación gráfica del espejo de luz de la piscigranja, esto es:

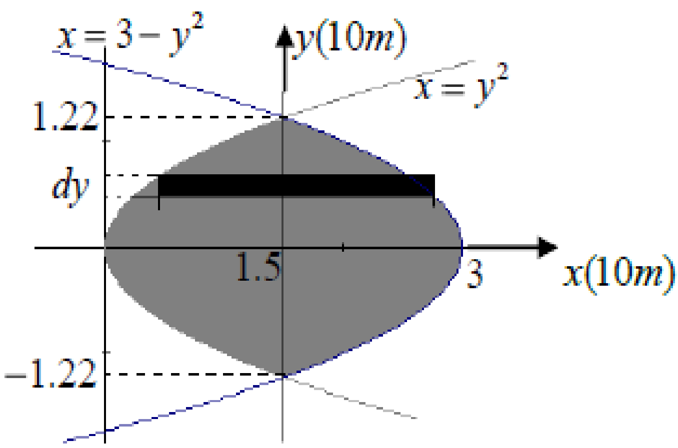


Figura 4.32: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

Calcular los puntos de intersección de las curvas $C_1 \cap C_2$ de las curvas dadas, tenemos igualando la variable x, esto es: $y^2 = 3 - y^2$ entonces $2y^2 - 3 = 0$ resolviendo la ecuación cíbica resulta $y = -1.22$, $y = 1.22$ y la variable $x = 1.511$ y $x = 3$ y $x = 0$; utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_Y.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1.22}^{1.22}[f(y) - g(y)]dy = \int_{-1.22}^{1.22}[(3 - y^2) - y^2]dy = \int_{-1.22}^{1.22}[3 - 2y^2]dy \\ &= \int_{-1.22}^{1.22}[3 - 2y^2]dy = 3y - 2\frac{y^3}{3} = 2450\text{m}^2[0.2cm] \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.9 *Calcule el área del terreno de corredor minero en la ciudad de Puerto Maldonado limitada por las curvas definidas C_1: $y = -2 + 3x + x^2$, C_2: $y = x^3$ donde las variables de x e y están en la escala 100 metros la unidad del eje X e y.*

Solución:

1. Mostramos la representación gráfica del área del terreno de corredor minero y esto es:

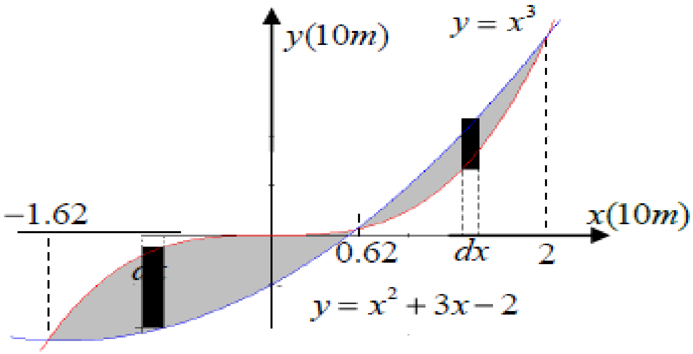


Figura 4.33: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

2. Calcular los puntos de intersección de las curvas $C_1 \cap C_2$ de las curvas dadas, tenemos igualando la variable y, esto es: $-2+3x+x^2 = x^3$ entonces $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ resolviendo la ecuación cíbica resulta $x = -1.62$, $x = 0.62$ y $x = 2$; utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_X.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1.62}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1.62}^{0.62} [g(x) - f(x)]dx + \int_{0.62}^{2} [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_{-1.62}^{0.62} [x^3 - (-2+3x+x^2)]dx + \int_{0.62}^{2} [(-2+3x+x^2) - x^3]dx \\
&= \int_{-1.62}^{0.62} [x^3 - x^2 - 3x + 2]dx + \int_{0.62}^{2} [-2+3x+x^2 - x^3]dx \\
&= [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x]|_{-1.62}^{0.62} + [-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x]|_{0.62}^{2} \\
&= [F(0.62) - F(-1.62)] + [F(2) - F(0.62)] = 4.658 + 1.2875 = 5.9459 \text{ héctarias}
\end{aligned}$$

esto implica el área del terreno de corredor minero es aproximadamente de 6 hectáreas.

Ejemplo 4.7.10 *Calcule el área de una cantera de yacimiento minero limitada por las curvas* C_1*:* $y = 2x - x^2$*,* C_2*:* $y = -x + 2$ *las variables* x*,* y *están es la escala de* 100 m *la unidad del eje* X *e* Y*.*

Solución:

1. Calcular los puntos de intersección de las curvas $C_1 \cap C_2$ de las curvas dadas, tenemos igualando la variable y, esto es: $2x - x^2 = -x + 2$ entonces $x^2 - 3x + 2 = 0$

resolviendo la ecuación cíbica resulta $x = 1$, $x = 2$ y utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_X.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^2 [(2x - x^2) - (-x + 2)]dx = \int_1^2 [3x - x^2 - 2]dx \\ &= \int_1^2 [3x - x^2 - 2]dx = [\frac{-x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x]|_1^2 \\ &= [\frac{-x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x]|_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{1}{6}\text{hectáreas} \end{aligned}$$

2. Mostramos la representación gráfica del área del terreno de cantera de yacimiento minero y esto es:

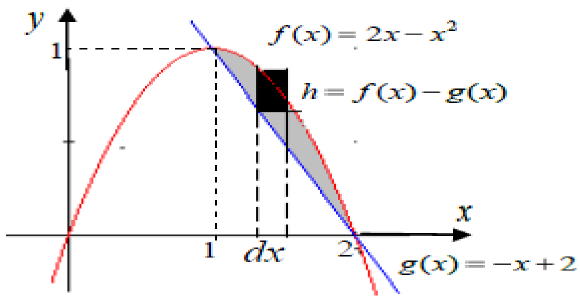


Figura 4.34: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

Ejemplo 4.7.11 *Calcule el area de lote de terreno para una Asociación Pro Vivienda Los Tulipanes en el Distrito de San Sebastian de la ciudad de Cusco, limitada por las curvas* C_1*:* $y = 2 + \frac{1}{3}(x + 3)$, C_2*:* $y = -x + 11$, C_3*:* $y = -2 + \frac{3}{8}(x - 2)$ *y* C_4*:* $y = -2 - \frac{4}{5}(x - 2)$, *de modo las variables* x *e* y *están dadas en la escala de* 10 *metros por unidad del eje* X *e* Y*.*

Solución:

1. Calcular los puntos de intersección de las curvas dadas.

   a) Sea $C_1 \cap C_2$ esto es, $11 - x = \frac{9 + x}{3}$ entonces resolviendo tenemos $x = 6$, $y = 5$

   b) Sea $C_1 \cap C_4$ esto es, $\frac{-2 + 4x}{5} = \frac{9 + x}{3}$ entonces resolviendo $x = -3$, $y = 2$

   c) Sea $C_3 \cap C_4$ esto es, $\frac{-2 + 4x}{5} = \frac{-22 + 3x}{8}$ entonces resolviendo $x = 2$, $y = -2$

d) Sea $C_3 \cap C_2$ esto es, $11 - x = \dfrac{-22+3x}{8}$ entonces resolviendo $x = 10$, $y = 1$

2. Mostramos el área del terreno de la A.P.V limitadas por las rectas dadas:

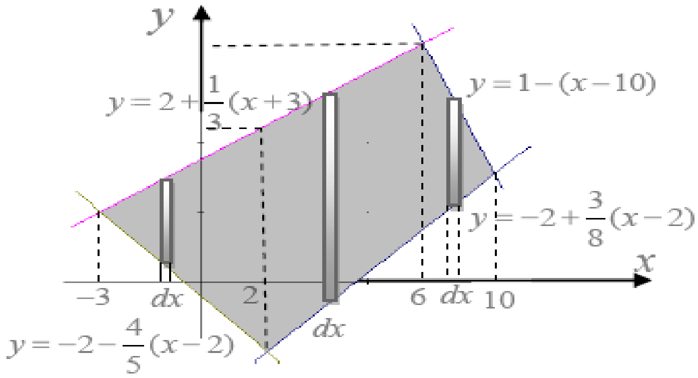


Figura 4.35: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

3. Las variables de integración son $x = -3$, $x = 2$, $x = 6$ y $x = 10$ utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_X y esto es: $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$\int_{-3}^{10}[f(x)-g(x)]dx = \int_{-3}^{2}[f(x)-g(x)]dx + \int_{2}^{6}[f(x)-g(x)]dx + \int_{6}^{10}[f(x)-g(x)]dx$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-3}^{2}[3+\frac{x}{3}-(\frac{2}{5}-\frac{4x}{5})]dx \\
A_1 &= \int_{-3}^{2}[\frac{13}{5}+\frac{17x}{15}]dx = \frac{13x}{5}+\frac{17x^2}{30}|_{-3}^{2} \\
A_1 &= \frac{13x}{5}+\frac{17x^2}{30}|_{-3}^{2} = \frac{61}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{2}^{6}[f(x)-g(x)]dx = \int_{2}^{6}[3+\frac{x}{3}-(-\frac{11}{4}+\frac{3x}{8})]dx \\
&= \int_{2}^{6}[3+\frac{x}{3}-(-\frac{11}{4}+\frac{3x}{8})]dx = \int_{2}^{6}[\frac{23}{4}-\frac{x}{24}]dx \\
&= \int_{2}^{6}[\frac{23}{4}-\frac{x}{24}]dx = \frac{23x}{4}-\frac{x^2}{48}|_{2}^{6} \\
&= \frac{23x}{4}-\frac{x^2}{48}|_{2}^{6} = \frac{67}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_6^{10}[f(x)-g(x)]dx = \int_6^{10}[11-x-(-\frac{11}{4}+\frac{3x}{8})]dx \\ &= \int_6^{10}[\frac{55}{4}-\frac{11x}{8}]dx = [\frac{55x}{4}-\frac{11x^2}{16}]|_6^{10} \\ &= \frac{55x}{4}-\frac{11x^2}{16}|_6^{10} = F(10)-F(6) = 11 \end{aligned}$$

Finalmente el área total es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{61}{6} + \frac{67}{3} + 11 = 4350\text{m}^2$$

Ejemplo 4.7.12 *Halle el área de una piscina(espejo de luz) para niños en la ciudad de Puerto Maldonado limitada por las curvas C_1: $y = x^2+1$, C_2: $y = -x^2+9$ siendo las variables x , y en la escala de 10 la unidad del eje x, Y.*

Solución:

1. Calcular los puntos de intersección de las curvas $C_1 \cap C_2$ de las curvas dadas, tenemos igualando la variable y, esto es: $9 - x^2 = x^2 + 1$ entonces $2x^2 - 8 = 0$ resolviendo la ecuación cubica resulta $x = -2$, $x = 2$ y la representación gráfica del área del espejo de luz de la piscina, esto es:

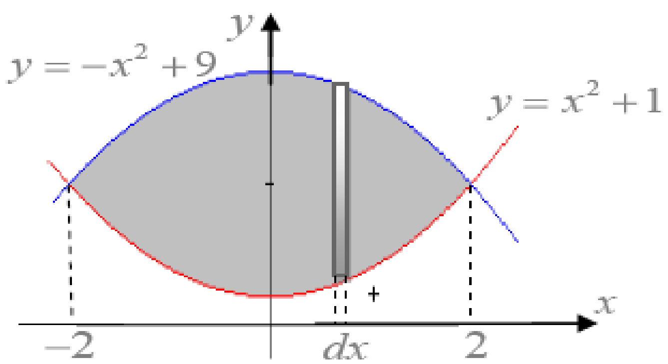


Figura 4.36: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

2. Utilizamos la fórmula de integral definida de tipo R_X, cuyos límites de integración son $x = -2$, $x = 2$

$$\int_{-2}^{2}[f(x)-g(x)]dx = \int_{-2}^{2}[-x^2+9-(x^2+1)]dx = \int_{-2}^{2}[-2x^2+8]dx$$

$A = [-2\frac{x^3}{3} + 8]|_{-2}^{2} = F(2) - F(-2) = 32 - 10.66 = 2133$ metros cuadrados
El área del espejo de luz de la piscina es 2133 metros cuadrados.

Ejemplo 4.7.13 *Calcule el área un pantano en la comunidad de Chapajal en la ciudad de Puerto Maldonado limitada por las curvas C_1: $y = x^2 - 3x$, C_2: $y = -x^2 + 4x$, cuyas variables x e y están en la escala de 100 metros.*

Solución: Calcular los puntos de intersección de las curvas $C_1 \cap C_2$ de las curvas dadas, tenemos igualando la variable y, esto es: $x^2 - 3x = -x^2 + 4x$ entonces $-2x^2 + 7x = 0$ resolviendo la ecuación cuadrática resulta $x = 0$, $x = 3.5$ y usamos la fórmula de integral definida de tipo R_X, esto es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = \int_0^2 [-x^2 + 4x] = [\frac{x^3}{3} + 2x^2]|_0^2 = 5.22 \text{ hectarias}$$
$$A_2 = \int_0^2 [x^2 - 3x] = [\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}]|_0^2 = |-3.33| \text{ hectarias}$$
$$A_3 = \int_2^{3.5} [-x^2 + 4x - x^2 + 3x] = [-2\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2}]|_0^2 = 52.122 \text{ hectarias}$$

Por consiguiente el área total es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 5.22 + 3.33 + 52.122 = 60.672 \text{ hectáreas de pantano}$$

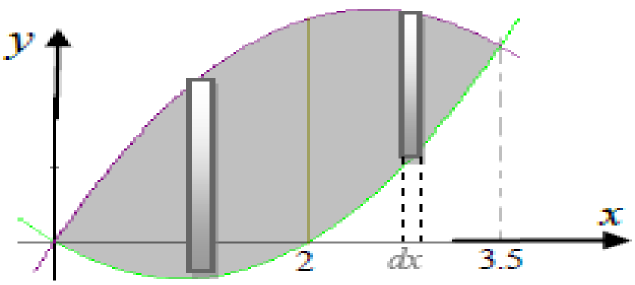


Figura 4.37: Área limitada entre dos curvas tipo R_X

4.7.1. Ejercicios propuestos

1. Halle el área del corredor minero en la comunidad de la Pampa del distrito de Manu limitada por las curvas C_1: $y = 6 - x^2$, C_2: $y = 6 - 6x$ cuyas variables del eje X e Y están en la escala de 100 metros la unidad. Respuesta 53.2 hectáreas.

2. Halle el área del espejo de luz de una laguna en la ciudad de Mazuco en la region Region de Madre de Dios limitada por curvas C_1: $y^2 = 6x$, C_2:$y = 2x - 6$, cuyas variables x e y están 100 metros. Respuesta es 20.109 hectárias de luz de la laguna.

3. Halle el área de la region limitada por las curvas $y = 4x^3 - 6x + \frac{2}{x^2+9}$ y las rectas $x = 0.1$ metros , 1.2 metros y $x = 2$. Respuesta 2297 metros cuadrados.

4. Halle el área del terreno agrícola de frutales en la comunidad de Laberinto limitada por las curvas $3x = 2y - y^2$ e $y = 2 + x$ cuyas variables x y y estan en la escala de 10 metros la unidad del eje X e y. Respuesta 6944 metros cuadrados de terreno agrícola.

5. Halle el área de un terreno agrícola para arroz en la provincia de Iberia de la ciudad de Puerto Maldonado limitada por un cerco que limita por un rio y las cercas alambricas de $x = 10$ metros y $x = 20$ metros. Respuesta 2509 metros cuadrados.

6. Halle el área de la region limitada por la curva $y = \frac{x^3-8}{x^2-4}$ y las rectas $x = 3$ a $x = 5$, cuyas variables x e y estan en la escala de 100 metros la unidad de cada eje X, y; el area representa un terreno de cultivo de maíz amarillo por los comuneros de La Joya. Respuesta $A = 7 + 4\ln(\frac{7}{15}) hectarias$

7. Halle el área de fundo de la Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios ubicada en el kilómetro 20 camino a la ciudad del Cusco, limitada por las curvas C_1: $y = 2x^3 - x^2 - 5x$, C_2: $y = -x^2 + 4x$ de modo que las variables x e y estan en la escala de 100 metros la unidad del eje X e Y. Respuesta 19.49 Hectáreas de terreno para proyectos de investigación.

8. Halle el espejo de luz de agua de una laguna ubicado en el fundo Chapajal de la ciudad de Puerto Maldonado limitada por la curva $y = \frac{x^3}{3} - 3x$, $y = -2x$ las variables de x e y estan en la escala de 10 metros la unidad del Eje X e y. Respuesta 1.498 hectáreas de espejo de luz de agua.

9. Halle el área de un yacimiento minero en la comunidad la Pampa de la ciudad de Puerto Maldonado limitada por la curva C: $y = x^4 - 2x^2 + 1$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$ las variables estan dadas en la escala 100 metros la unidad de cada eje X e Y. Respuesta 1.074 hectáreas de yacimiento minero.

10. Halle el área del terreno de cultivo de maíz en la comunidad de Pariamanu en la ciudad de Puerto Maldonado limitada por un rio y cercas metálicas dada la trayectoria del río: $y = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x$ y las rectas(cerca) $x = -2$, $x = 2$ las variables de x e y están en la escala 100 metros. Respuesta 6.93 hectáreas de maíz sembrada.

4.8. Volumen de un sólido revolución

El volumen de un sólido revolución se obtiene al hacer girar o rotar una region plana al rededor de un eje vertical o horizontal dependiendo de las condiciones del problema. La intersección de un sólido con un plano en una region limitada se denomina sección de área transversal denotada $A(x)$ función variable de x, además es derivable e integrable sobre un intervalo $[a, b]$ de bases iguales, es posible hallar el volumen de sólido revolución utilizando la definición y propiedades de integral definida del tipo R_X o R_Y.

Definición 4.9 (Calculo de volumen de un sólido: Disco tipo rebanada) *Para estimar el volumen de un sólido revolución de la función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e integrable sobre el intervalo. Consideramos un* k *-ésimo rebanada de sección de área transversal del sólido revolución en el punto* $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *denotada por* $A(c_k)$ *y su espesor sea* $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ *de longitud igual o ancho de la* k*- ésima rebanada. Al dividir el volumen del sólido en* n *rebanadas finitas se obtiene un* k *ésimo rebanada de volumen denotado por* $\Delta v(c_k) = \pi R^2(c_k).\Delta x_k$ *con* $k = 1, 2, 3, ..., n$*. Si realizamos la suma finita de cada una de los elementos diferenciales de volumen se obtiene el volumen sólido revolución aproximada, [13], [10].*

El volumen del sólido revolución como la suma infinita de todos los elementos diferenciales de volumen, considerando el área de la base circular esto es, $A(c_k)$ y el espesor sea $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y resulta:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [A(c_k)\Delta x_k] = \int_a^b \pi A(x)dx \\ V &= \int_a^b \pi A(x)dx, [4], [20]. \end{aligned}$$

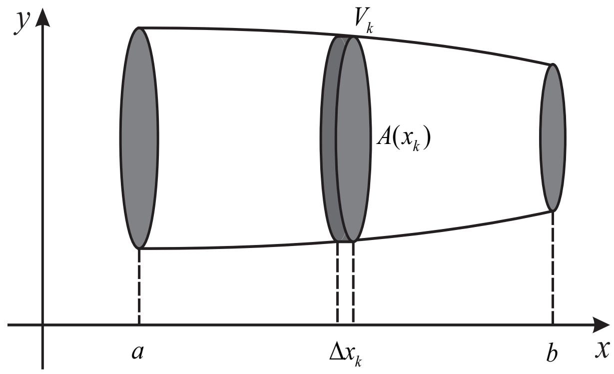


Figura 4.38: Volumen del sólido revolución: Disco rebanada

Definición 4.10 (Volumen de sólidos de revolución:Rotación eje X) *Dada la función $y = f(x)$ continua e integrable en el intervalo $[a, b]$, el volumen de un sólido revolución se generan a partir de regiones planas de rotación alrededor del eje X, los discos de tipo arandelas son secciones de área transversal de radio $f(x) = R$ función continua e integrable sobre el intervalo $[a, b]$ y que el eje sea X. La aproximación del volumen de sólido de revolución es la suma de elementos diferenciales de volumen del producto de áreas elementales y la base, estos pueden ser discos o cilindros circulares como sólidos elementales, [10], [13], esto es la gráfica:*

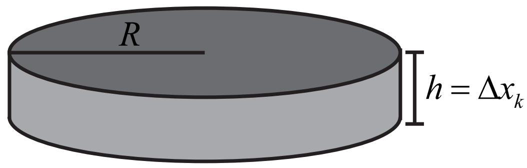


Figura 4.39: Volumen del sólido revolución: Disco arandela

Ahora consideramos los n discos circulares de espesor Δx_k con radios iguales $f(c_k) = R(c_k)$ con $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ entonces obtenemos el k- ésimo volumen del disco circular denotado por:
$\Delta V(c_k) = A(c_k) \cdot \Delta x_k = \pi R^2(c_k) \cdot \Delta x_k$. Si $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces tenemos el volumen aproximado.
$V = \lim\limits_{n\to\infty} [\pi R^2(c_1)\Delta x_1 + \pi R^2(c_2)\Delta x_2 + \cdots + \pi R^2(c_n)\Delta x_n]$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\pi R^2(c_k)\Delta x_k] = \int_a^b \pi R^2(x)dx$$

$V = \int_a^b \pi R^2(x)dx$, el volumen de sólido revolución de rotación eje X.

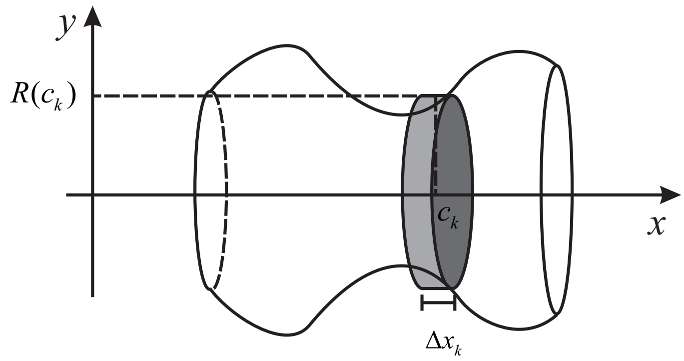


Figura 4.40: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Definición 4.11 (Volumen de sólido revolución: Rotación eje Y) *Dada una función $x = g(x)$ continua e integrable sobre el intervalo $[c, d]$ y sea el eje Y, la rotación del solido revolución sea respecto al eje Y. Los discos de tipo arandelas son secciones de área transversal de radio $g(x) = R$ función continua e integrable sobre el intervalo $[c, d]$ y que el eje sea Y. La aproximación del volumen de sólido de revolución es la suma de elementos diferenciales de volumen del producto de áreas elementales y la base, estos pueden ser discos o cilindros circulares como sólidos elementales, [4], [13], esto es la gráfica.*

Sean los n discos o arandelas circulares de espesor Δy_k y radio $g(c_k) = R(c_k)$ con $k = 1, 2, 3, ..., n$ entonces obtenemos el k-ésimo volumen diferencial del disco circular denostado por:
$\Delta V(c_k) = A(c_k).\Delta y_k = \pi R^2(c_k).\Delta y_k$. Si $\Delta y_k = \dfrac{d-c}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces tenemos el volumen aproximado.

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{n\to\infty} [\pi R^2(c_1)\Delta y_1 + \pi R^2(c_2)\Delta y_2 + \cdots + \pi R^2(c_n)\Delta y_n] \\
V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\pi R^2(c_k)\Delta y_k] = \int_a^b \pi R^2(y)dy \\
V &= \int_c^d \pi R^2(y)dy
\end{aligned}$$

el volumen de sólido revolución de rotación eje Y.

4.9. Método de arandela para dos funciones

Definición 4.12 (Volumen de sólido revolución: Rotación eje X) *Sean las funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas e integrables sobre el intervalo $[a, b]$ con la condición $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$,la región plana limitada por estas curvas y las rectas $x = a$, $x = b$ tiene rotación al rededor del eje X, [4], [13].*

Al construir el volumen del solido revolución generada de la region plana al girar respecto al eje X, tenemos un sólido revolución que no toca o no cruza el de rotación al eje X, más bien tiene un agujero paralelo al eje X. Entonces las secciones transversales de discos circulares son perpendiculares al eje de rotación las arandelas y mostramos la representación gráfica.

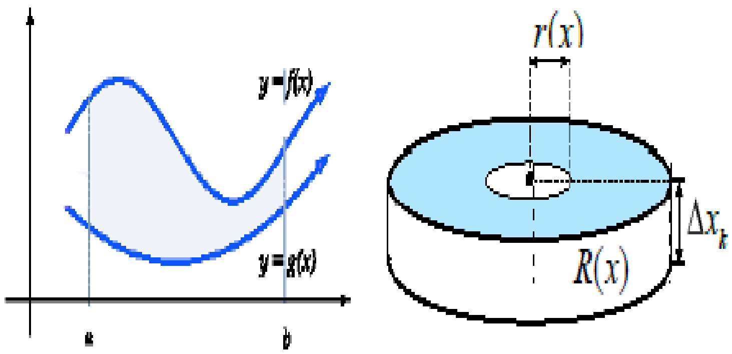


Figura 4.41: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Al considerar ahora las n arandelas circulares de espesor Δx_k esto es:
$A(c_k) = \pi[R^2(c_k) - r^2(c_k)]$ con $k = 1, 2, 3, ..., n$ cuyos radios son funciones integrables y continuas sobre el intervalo $[a, b]$, $R^2(c_k) - r^2(c_k)$ muestra un agujero al rededor del eje X. El volumen del sólido revolución para el k-ésimo arandela circular es:
$\Delta V(c_k) = \pi[R^2(c_k) - r^2(c_k)].\Delta x_k$ con $k = 1, 2, 3, ..., n$, hacemos suma infinita de todo los elementos diferenciales de volumen huecos, para ello consideramos arandelas muy finas o delgadas para una buena aproximación del volumen total. El volumen del sólido revolución por medio de arandelas circulares se define como el límite de la suma infinita de estos elementos diferenciales de volumen, y esto es:

Si $\Delta V(C_k) = A(c_k).\Delta x_k = \pi[R^2(c_k) - r^2(c_k)].\Delta x_k$

$\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$

Mostramos el gráfico del sólido revolución de la región plana respecto al eje X, mediante método de arandelas.

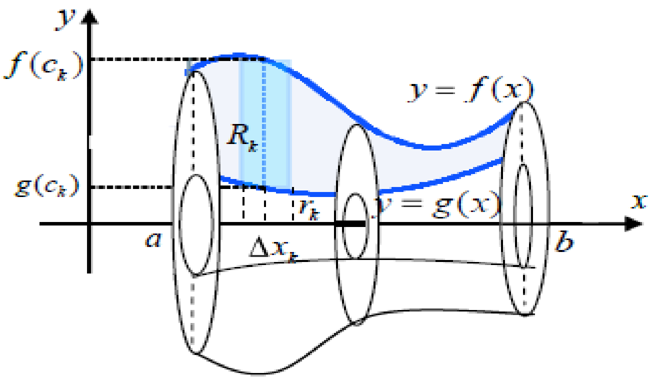


Figura 4.42: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

$$\Delta V = \lim_{n\to\infty} [\pi[R^2(c_1) - r^2(c_k)]\Delta x_1 + \pi[R^2(c_2) - r^2(c_k)]\Delta x_2 + \cdots + \pi[R^2(c_n) - r^2(c_k)]\Delta x_n]$$

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi[R^2(c_k) - r^2(c_k)]\Delta x_k = \int_a^b \pi[R^2(x) - r^2(x)]dx \\ V &= \int_a^b \pi[R^2(x) - r^2(x)]dx \end{aligned}$$

el volumen de sólido revolución de rotación eje X, para dos funciones.

Definición 4.13 (Volumen de sólido revolución: Rotación eje Y) *Sean las funciones $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuas e integrables sobre el intervalo $[c,d]$ con la condición $f(y) \geq g(y)$ para todo $y \in [c,d]$, la región plana limitada por estas curvas y las rectas $y = c$, $y = d$ tiene rotación al rededor del eje Y, [4], [13].*

Al construir el volumen del solido revolución generada de la region plana al girar respecto al eje Y, tenemos un sólido revolución que no toca o no cruza el de rotación al eje Y, más bien tiene un agujero paralelo al eje Y entonces las secciones transversales de discos circulares son perpendiculares al eje de rotación las arandelas. El volumen del sólido revolución por medio de arandelas circulares y se como la suma infinita de estos discos circulares de grosor o espesor iguales $\Delta y_k = \dfrac{d-c}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Si $\Delta V(C_k) = A(c_k).\Delta y_k = \pi[R^2(c_k) - r^2(c_k)].\Delta y_k$

$$V = \lim_{n\to\infty} [\pi[R^2(c_1) - r^2(c_k)]\Delta y_1 + \pi[R^2(c_2) - r^2(c_k)]\Delta y_2 + \cdots + \pi[R^2(c_n) - r^2(c_k)]\Delta y_n]$$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi[R^2(c_k) - r^2(c_k)]\Delta y_k = \int_c^d \pi[R^2(y) - r^2(y)]dy$$

$$V = \int_c^d \pi[R^2(y) - r^2(y)]dy$$

el volumen de sólido revolución de rotación eje Y para dos funciones.

Ejemplo 4.9.1 *Halle el volumen de un sólido revolución que resulta de hacer girar la region plana al rededor al eje Y, limitada por la curva C: $y = 3x^3$ y las rectas $x = 0$, $y = 8$, que representa una copa de cristal.*

Solución:

1. Hagamos la representación de la región plana y luego rotamos al rededor del eje Y y resulta:

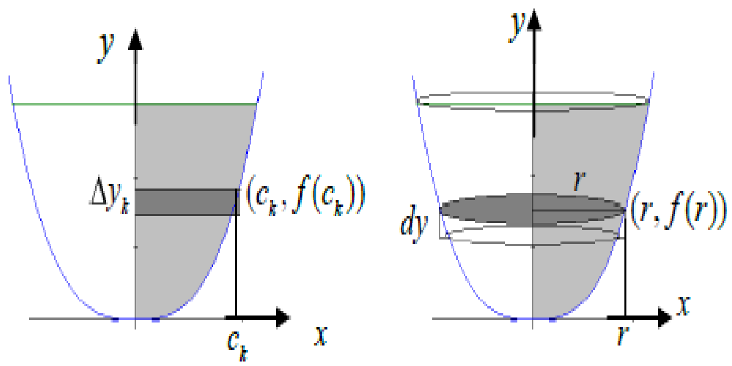


Figura 4.43: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

Vemos del gráfico las secciones de áreas transversales son perpendiculares al eje de la rotación los discos o las arandelas circulares de radio $r = x$ y altura $h = y$.

Entonces el volumen del sólido revolución por medio de todos las arandelas cilíndricas como la suma infinita de estos discos de elementos diferenciales de volumen y esto es:

$\Delta V = \pi r^2(c_k).\Delta y_k$ con $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

Hacemos cambio de variable de integración $x = 0$ entonces $y = 0$ y $y = 8$ y la variable $x = g(y) = \sqrt[3]{\dfrac{y}{3}} = r$ esto es el radio de la copa.

2. Hallamos el volumen de la copa de cristal, utilizando la definición de integral definida para sólidos de revolución del tipo R_Y.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\pi R^2(c_k)\Delta y_k] = \int_0^8 \pi x^2 dy \\ V &= \int_0^8 \pi x^2 dy = 0.481 \int_0^8 y^{2/3} dy = \frac{1.442}{5} y^{5/3}|_0^8 \\ V &= 0.481 \int_0^8 y^{2/3} dy = \frac{1.442}{5} y^{5/3}|_0^8 = 9.245 \text{ metros cúbicos} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.2 *Halle el volumen del sólido revolución al girar la region plana alrededor del eje X limitada por la curva $y = 3x^2$ con $y > 0$ y las rectas $y = 0$, $y = 12$ el sólido revolución es una copa de cobre.*

Solución:

1. Representación gráfica de la región plana al rededor del eje X y muestra un sólido revolución de forma.

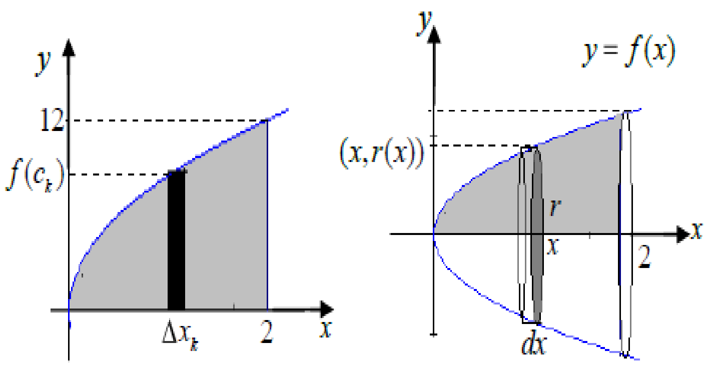


Figura 4.44: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Establecemos elemento diferencial de volumen infinitesimal para el sólido de revolución.

$$\Delta V = \pi r^2(c_k).\Delta x_k \text{ con } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Hacemos cambio de variable de integración $y = 0$ entonces $x = 0$, si $y = 12$ entonces $x = 2$; la variable radio es función de $r = f(x) = 3x^2$ esto es el radio de la copa.

2. Hallamos el volumen de la copa de cobre, utilizando la definición de integral definida para sólidos de revolución del tipo R_X.

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\pi R^2(c_k)\Delta x_k] = \int_0^2 \pi y^2 dx \\
V &= \int_0^2 \pi y^2 dx = 9\pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{9\pi}{5} x^5|_0^2 \\
V &= \frac{9\pi}{5} x^5|_0^2 = 57.6\pi \text{ metros cúbicos}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.3 *Halle el volumen del sólido revolución al girar la region plana al rededor del eje X, limitada por las curvas $y = x^2 - 6x + 11$ y las rectas $x = 0$, $x = 6$.*

Solución:

Vemos el radio del sólido revolución $r = f(x) = (x-3)^2 + 2$

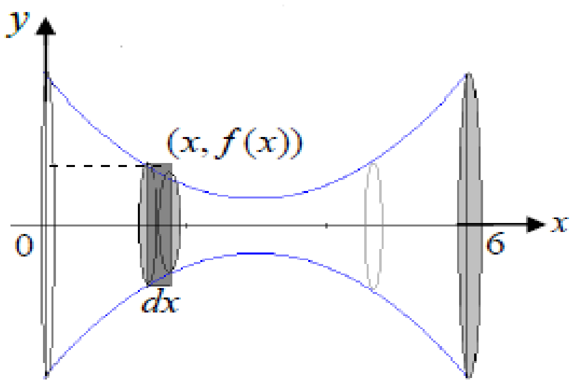


Figura 4.45: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Hacemos cambio de variable y limites de integración, sea $u = x - 3$ entonces $du = dx$, $z_0 = -3$, $z_1 = 3$

Utilizamos la fórmula de integral definida para hallar volumen de sólido revolución respecto al eje X y esto es:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^6 \pi f^2(x)dx = \int_0^6 \pi[(x-3)^2+2]^2dx \\
V &= \int_0^6 \pi[(x-3)^2+2]^2dx = \int_{-3}^3 \pi[z^2+2]^2dz = \int_{-3}^3 \pi[z^4+4z^2+4]dz \\
V &= \int_{-3}^3 \pi[z^4+2z^2+4]dz = [\frac{z^5}{5}+\frac{4z^3}{3}+4z^2]|_{-3}^3 \\
V &= [\frac{z^5}{5}+\frac{4z^3}{3}+4z^2]|_{-3}^3 = 193.5\pi \text{ unidades cúbicas}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.9.4 *Halle le volumen del volumen revolución al girar la region plana alrededor del eje Y, limitada por las curvas C: $x = y^2 - 4y + 7$, y la recta $x = 12$ que representa una veta de mineral de plomo en la ciudad de Cusco.*

Solución:

La representación gráfica del sólido revolución respecto al eje Y es:

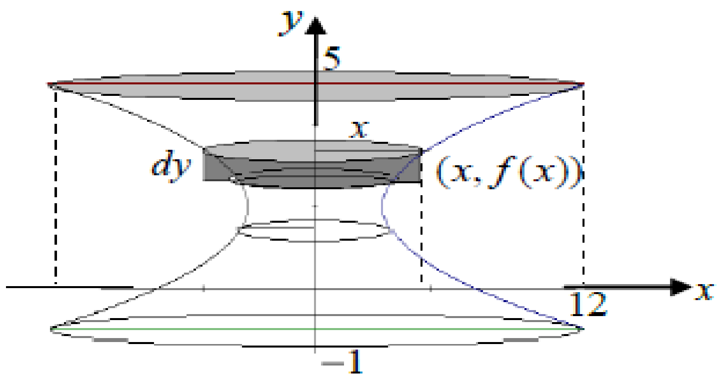


Figura 4.46: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

Hallemos los puntos de intersección de la curva $x = y^2 - 4y + 7 = 12$ entonces resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos $y^2 - 4y - 5 = 0$, $y = -1$, $y = 5$.

Además cambio de variable de integración $g(y) = y^2 - 4y + 7 = (y-2)^2 + 3$, $du = dy$.

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{5} \pi g^2(y)dy = \int_{-1}^{5} \pi[(y-2)^2+3]^2 dy, \quad z = y-2 \text{ entonces } z+2 = y \\
V &= \int_{-1}^{5} \pi[(y-2)^2+3]^2 dy = \int_{-3}^{3} \pi[z^2+3]^2 dz = \int_{-3}^{3} \pi[z^4+6z^2+9]dz \\
V &= \int_{-3}^{3} \pi[z^4+6z^2+9]dz = \frac{z^5}{5} + 2z^3 + 9z|_{-3}^{3} \\
V &= \frac{z^5}{5} + 2z^3 + 9z|_{-3}^{3} = 259.2\pi \text{ metros cúbicos}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.5 *Halle el volumen del sólido revolución al girar la región plana al rededor del x, limitada por las curvas C_1: $y = 1 + \frac{1}{4}(x-3)^2$, C_2: $y = 3 - \frac{3}{8}(x - 3^2)$ y las rectas $x = 1.5$ y $x = 4.5$, el sólido revolución representa un pozo de petróleo en la ciudad de Puerto Maldonado en m^3.*

Solución:

Hagamos cambio de variable de integración $z = x - 3$ entonces $dx = dz$,tenemos lo siguiente $1+\frac{1}{4}z^2 = 3-\frac{1}{8}z^2$ resolviendo la ecuación de segundo grado resulta $z = \pm 2.3$, la representación gráfica del pozo de petróleo es:

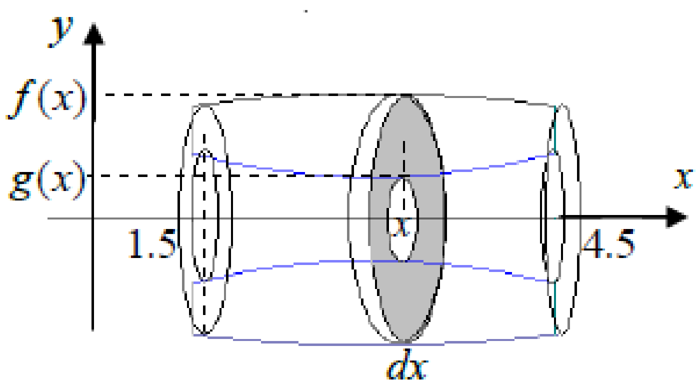


Figura 4.47: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Utilizamos la integral definida para calcular el volumen sólido revolución establecida por dos curvas, $f(x)$ e $g(x)$ con la condición $f(x) \geq g(x)$ siendo el radio la función $R^2 = f^2(x) - g^2(x)$ y esto es:

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx \text{ con } x-3=z \text{ entonces } dx=dz \text{ con } z=-1.5 \text{ hasta } z=1.5\\
V &= \int_{1.5}^{4.5} \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx = \int_{1.5}^{4.5} \pi[(1+\frac{1}{4}(x-3)^2)^2 - (3-\frac{1}{8}(x-3)^2)^2]dx\\
V &= \int_{-1.5}^{1.5} \pi[(1+\frac{1}{4}z^2)^2 - (3-\frac{1}{8}z^2)^2]dz\\
V &= \pi\int_{-1.5}^{1.5} \frac{-512+80z^2+3z^4}{64}dz = \frac{\pi}{64}[\frac{3z^5}{5} + \frac{80z^3}{3} - 512z]|_{-1.5}^{1.5}\\
V &= \frac{\pi}{64}[\frac{3z^5}{5} + \frac{80z^3}{3} - 512z]|_{-1.5}^{1.5} = 21.04
\end{aligned}$$

metros cúbicas de petróleo hay en el pozo en la ciudad de Puerto Maldonado.

Ejemplo 4.9.6 *Halle el volumen del sólido revolución que resulta hacer girar la región plana al rededor del eje Y, limitada por las curvas C_1: $y^2 = 12x$, C_2: $y = 2x$, C_3: $x = 3$, el sólido revolución representa estanque de agua subterránea.*

Solución:

Representación gráfica del pozo de agua subterránea es:

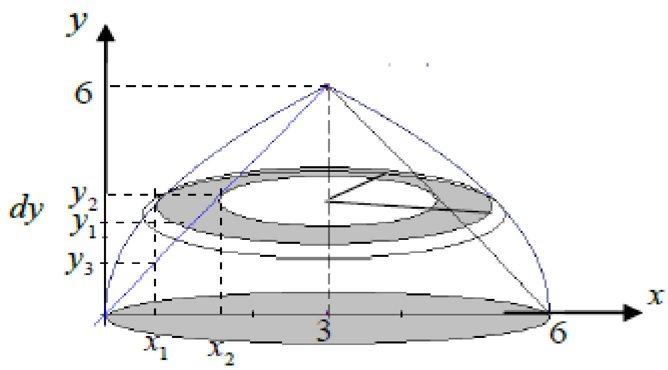


Figura 4.48: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

Hallamos los puntos de intersección entre las curvas dadas $y^2 = 12x$ entonces $4x^2 = 12x$ resolviendo la ecuación de segundo grado resulta, $x = 0$ y $x = 3$; luego el radio es función variable $r^2(x) = (3-x_1)^2 - (3-x_2)^2$.

$$V = \int_0^6 \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy = \int_0^6 \pi[(3-\frac{y^2}{12})^2 - (3-\frac{y}{2})^2]dy$$

$$V = \int_0^6 \pi[3y - \frac{3y^2}{4} + \frac{y^4}{144}]dy = \int_0^6 \frac{\pi}{144}[432y - 108y^2 + y^4]dy$$

$$V = \int_0^6 \frac{\pi}{144}[432y - 108y^2 + y^4]dy = \frac{\pi}{144}[216y^2 - 36y^3 + \frac{y^5}{5}]|_0^6$$

$$V = \frac{\pi}{144}[216y^2 - 36y^3 + \frac{y^5}{5}]|_0^6 = 1555.1 \text{ metros cúbicos de agua subterránea.}$$

Ejemplo 4.9.7 *Halle el volumen del sólido revolución que resulta de hacer girar alrededor del eje X, limitada por la curva $x^3 = y^2(3-x)$ y las rectas $x=1$, $x=2$, el sólido revolución representa una proveta de laboratorio.*

Solución:

La representación del sólido revolución es:

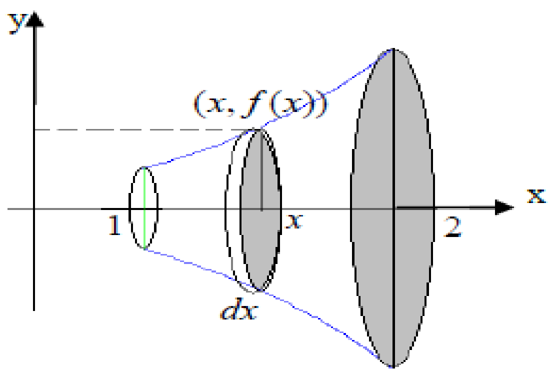


Figura 4.49: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

$$V = \int_1^2 \pi y^2 dx = \int_1^2 \pi \frac{x^3}{3-x}dx$$

$$V = \int_1^2 \pi \frac{x^3}{3-x}dx = -\pi\int_1^2 [x^2 + 3x + 9 + \frac{27}{x-3}]dx$$

$$V = -\pi\int_1^2 [x^2 + 3x + 9 + \frac{27}{x-3}]dx = -\pi[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + 27\ln(x-3)]|_1^2$$

$$V = -\pi[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + 27\ln(x-3)]|_1^2 = -\pi[15.833 - 27 * \ln(2)] = 2.88\pi \text{ unidades cúbicas}$$

Ejemplo 4.9.8 *Halle el volumen del sólido revolución que resulta de hacer girar la region plana al rededor del eje X, limitada por las curvas C_1: $y = 3 - x^2$, $C - 2$: $y = 2x^2$.*

Solución:

Hallemos los puntos de intersección de las curvas y resulta $2x^2 = 3 - x^2$ entonces $x^2 = 1$, $x = \pm 1$

Utilizamos la integral definida para calcular el volumen del sólido de revolución de tipo R_X,

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx = \pi \int_{-1}^{1} [(3 - x^2)^2 - (2x^2)^2]dx \\
V &= \pi \int_{-1}^{1} [(3 - x^2)^2 - (2x^2)^2]dx = \pi \int_{-1}^{1} [9 - 6x^2 - 3x^4]dx \\
V &= \pi \int_{-1}^{1} [9 - 6x^2 - 3x^4]dx = \pi[9x - 2x^3 - \frac{3x^5}{5}]|_{-1}^{1} \\
V &= F(1) - F(-1) = \pi\frac{64}{5} = 12.8\pi \text{unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

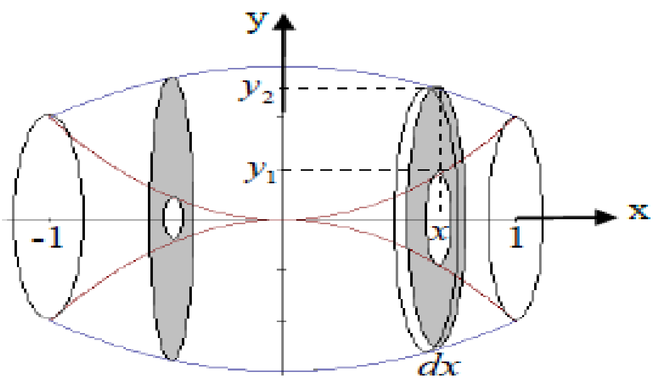


Figura 4.50: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Ejemplo 4.9.9 *Halle el volumen del sólido revolución de hacer girar la region plana al rededor del eje Y, limitada por las curvas $y = 5 - 3x^2$ y $y = -x^3 + 3x^2$.*

Solución:

Representación gráfica del sólido revolución, de hacer girar la región plana al rededor del eje Y y es:

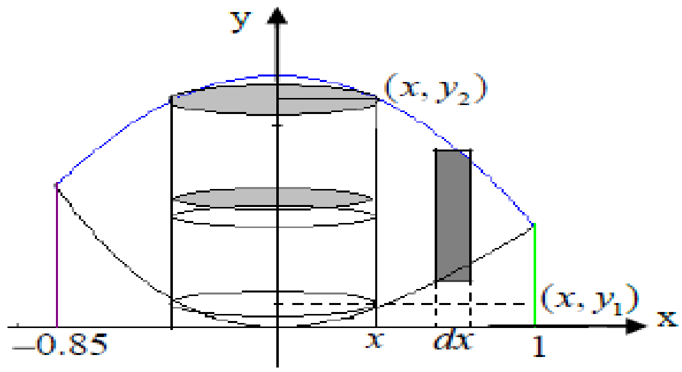


Figura 4.51: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

Sea elemento diferencial de volumen de un sólido revolución sea $\Delta V = 2\pi r(y_2 - y_1)\Delta x$, donde el perímetro de la base de cilindro $p = 2\pi r$ y radio del cilindro $r = x$. Hallamos los puntos de intersección de las curvas establecidas $5 - 3x^2 = -x^3 + 3x^2$ entonces $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$ resolviendo la ecuación de tercer grado tenemos $x = -0.854$, $x = 1$, $x = 5.854$ y utilizamos la integral definida para calcular el volumen del sólido revolución.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-0.85}^{1} r[y_2 - y_1]dx \\
V &= \int_{-0.85}^{1} 2\pi x[(5 - 3x^2) - (-x^3 + 3x^2)]dx = 2\pi \int_{-0.85}^{1} [x(x^3 - 6x^2 + 5)]dx \\
V &= 2\pi \int_{-0.85}^{1} (x^4 - 6x^3 + 5x)dx = 2\pi[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{5x^2}{2}] \\
V &= 2\pi[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{5x^2}{2}]|_{-0.85}^{1} = 0.53\pi \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.10 *Halle el volumen del sólido revolución generado por la region plana limitada por la plana y limitada por las curvas $y^2 - 4y = 4x$, $y = 1.63x + 2.2$, las rectas $x = -1$, $x = 2$, la rotación sea el eje X.*

Solución:

Hallamos los puntos de intersección entre las curvas dadas, si $y = 2 \pm 2\sqrt{x+1}$ entonces $y^2 - 4y = \frac{1}{1.63}(-2.2 + y)$ resolviendo la ecuación resulta $y = 5.46$, $y = 1.01$, mientras los valores de la variable x son: $x = -1$, $x = -0.74$, $x = 2$.

La representación gráfica del sólido revolución de la región plana que gira al rededor del eje X.

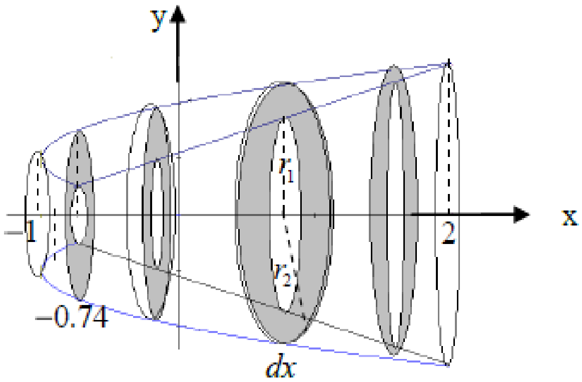


Figura 4.52: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

$$V = \int_{-1}^{2} \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx = \int_{-1}^{-0.74} \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx + \int_{-0.74}^{2} \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx$$
$$V = \int_{-1}^{-0.74} \pi[y_4^2(x) - y_3^2(x)]dx + \int_{-0.74}^{2} \pi[r_2^2(x) - r_1^2(x)]dx = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \int_{-1}^{-0.74} \pi[(2 + 2\sqrt{x+1})^2 - (2 - 2\sqrt{x+1})^2]dx,\ z = x + 1 \text{ entonces } dx = dz, z = 0, z = 0.26$$
$$V_1 = \int_{0}^{0.26} \pi[(2 + 2\sqrt{z})^2 - (2 - 2\sqrt{z})^2]dz$$
$$V_1 = \int_{0}^{0.26} 16\pi\sqrt{z}dz = \frac{32\pi}{3} z^{3/2}|_0^{0.26} = 1.414\pi \text{ unidades cubicas}$$

$$V_2 = \int_{-0.74}^{2} \pi[(2 + 2\sqrt{x+1})^2 - (2.2 + 1.63x)^2]dx$$
$$V_2 = \int_{0.26}^{3} \pi[(2 + 2\sqrt{z})^2 - (2.2 + 1.63(z-1))^2]dz$$
$$V_2 = \int_{0.26}^{3} \pi[3.67 + 8\sqrt{z} + 2.14z - 2.66z^2]dz$$
$$V_2 = \pi[3.67z + 5.33z^{3/2} + 1.07z^2 - 0.88z^3]|_{0.26}^{3} = 21.4\pi \text{ unidades cúbicas}$$

El volumen total del sólido es: $V = V_1 + V_2 = 22.2$ unidades cúbicas

Ejemplo 4.9.11 *Halle el volumen del sólido de revolución de hacer girar la región plana al rededor del eje Y, limitado por las curvas C_1: $y = -2x^2 + 3x + 5$, C_2: $y = 2x^2 + 3x$ y las rectas $x = 0$, $y = 5.9$ para $x = 1.1$.*

Solución:

Representación gráfica del sólido revolución respecto al eje Y, esto es:

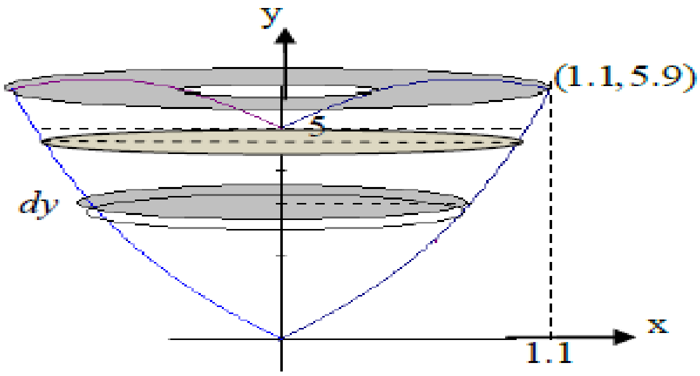


Figura 4.53: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

Si $x = 0$ entonces $y = 5$, si $x = 1.1$ entonces $y = 5.9$ además $y = 0$, utilizamos la integral definida de tipo R_Y.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{5.9} \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy = \int_0^{5} \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy + \int_5^{5.9} \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy \\
V &= \int_0^{5.9} \pi[(\frac{3+\sqrt{49+8y}}{4})^2 dy - \int_0^{1.1} \pi[y_1^2(x) - 25]dx \\
V &= \int_0^{5.9} \pi[(\frac{3+\sqrt{49+8y}}{4})^2 dy - \int_0^{1.1} \pi[(2x^2+3x)^2 - 25]dx \\
V &= \int_0^{5.9} \pi[\frac{29+3\sqrt{49+8y}+4y}{8} dy - \int_0^{1.1} \pi[4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 25]dx \\
V &= \pi[(\frac{29y}{8}\frac{\sqrt{(49+8y)^3}}{32} + \frac{y^2}{4})|_0^{5.9} - (\frac{4x^5}{5} + 3x^4 + 3x^3 - 25x)|_0^{1.1}] \\
V &= \pi[59.57 + 17.83] = 77.4\pi \text{ unidades cúbicas}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.9.12 *Halle el volumen del sólido revolución al hacer girar la región plana* *al rededor del eje Y, limitada por las curvas C_1: $y = x^2 - 3x$, C_2: $y = -x^2 + 5x$ que representa un cofre de oro.*

Solución:

La representación gráfica del cofre de oro, limitada por las curvas dadas, esto es:

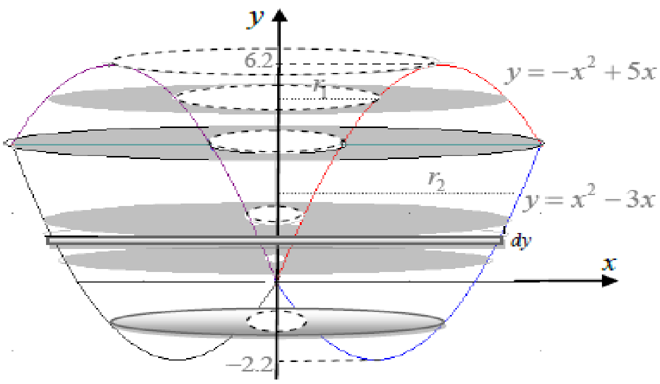


Figura 4.54: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

Utilizamos la integral definida para calcular el volumen del sólido revolución con límites de integración $y = -2.2$ a $y = 6.2$.

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2.2}^{6.2} \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy = \int_{-2.2}^{6.2} \frac{\pi}{4}[(5 + \sqrt{25-4y})^2 - (3 + \sqrt{9+4y})^2]dy \\
V &= \frac{\pi}{4}\int_{-2.2}^{6.2} [32 - 8y + 10\sqrt{25-4y} - 6\sqrt{9+4y}]dy \\
V &= \frac{\pi}{4}[32y - 4y^2 - \frac{5}{3}\sqrt{(25-4y)^3} - \sqrt{(9+4y)^3}]|_{-2.2}^{6.2} \\
V &= \frac{\pi}{4}[F(6.2) - F(-2.2)] = \frac{\pi}{4}(-152.01 + 417.379) = 66.32\pi \text{ unidades cúbicas}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.13 *Halle el volumen del sólido revolución de hacer girar una region plana al rededor del eje X, limitada por las curvas C_1: $y = 2 - x^4$ y C_2: $y = 1$; el sólido representa el espesor del barril para extraer galones de petróleo de un pozo en la ciudad de Iquitos.*

Solución:

Hallamos los puntos de intersección de las curvas dadas $C_1 \bigcap C_2$ en la variable y esto

es:
$y = 1 = 2 - x^4$ entonces $x^4 = 1$ resolviendo la ecuación de cuarto grado y tiene las raíces $x = -1$ y $x = 1$ en unidades de metros y usamos la integral definida para calcular el volumen del sólido revolución de tipo R_X.
La representación de barril para extraer petróleo del subsuelo, esto es:

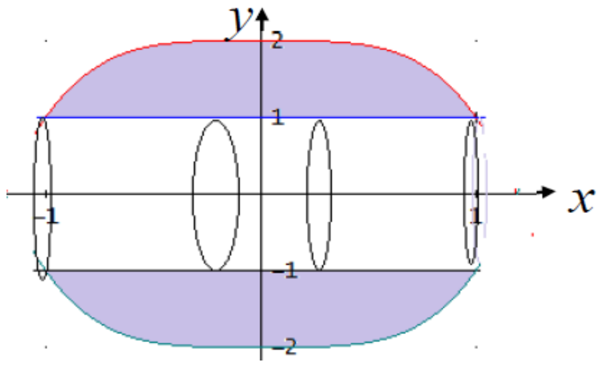


Figura 4.55: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx = \int_{-1}^{1} \pi[(2 - x^4)^2 - (1)^2]dx \\
V &= \int_{-1}^{1} \pi[(2 - x^4)^2 - (1)^2]dx = \int_{-1}^{1} \pi[4 - 4x^4 + x^8 - 1]dx \\
V &= \int_{-1}^{1} \pi[3 - 4x^4 + x^8]dx, \text{ uso de propiedades de integración.} \\
V &= \pi[3x - 4\frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9}]|_{-1}^{1} = F(1) - F(-1) = \frac{208}{45}. \\
V &= F(1) - F(-1) = 4.62\pi\ m^3 \text{ de espesor del barril para extraer petróleo del subsuelo.}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.9.14 *Halle el volumen de un sólido revolución de hacer girar la region plana al rededor del eje Y limitada por las curvas C_1: $y = x^2$, C_2: $x = 2$, $x = 5$ y C_3; $y = 8$. El sólido revolución representa el casco perimétrico de miles de metros cúbicos de material noble (pared, piso, asientos circulares etc.) del estadio de Garcilaso de la Vega en la ciudad del Cusco. Las variables x e y estan en la escala de 1000 metros de los X, Y la unidad.*

Solución:
Hallamos los puntos de intersección de las curvas $C_1 \bigcap C_2$ y resulta: $x = 2$ entonces $y = 4$, además si $x = 5$ entonces $y = 25$, utilizamos la integral definida para calcular el volumen del sólido revolución de hacer girar alrededor del eje Y.
Presentamos el casco circular del estadio de Garcilaso de la Vega en la ciudad de Cusco, esto es:

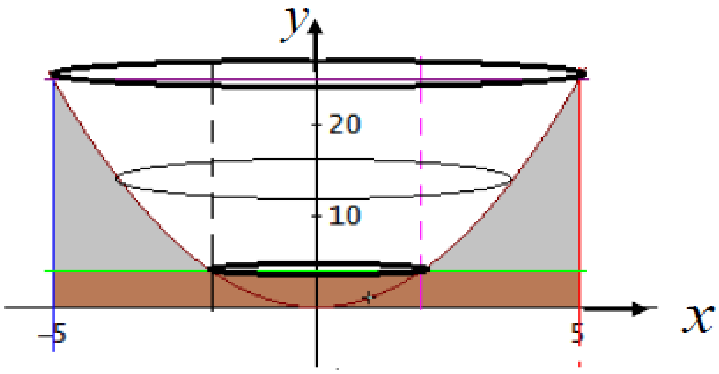


Figura 4.56: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Vemos regiones de hacer girar respecto al eje Y entonces $V_T = V_1 + V_2$.

$$V = \int_2^4 \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy + \int_4^{25} \pi[f^2(y) - g^2(y)]dy$$

$$V = \int_2^4 \pi[(5)^2 - (2)^2]dy + \int_4^{25} \pi[(5)^2 - (\sqrt{y})^2]dy$$

$$V = \int_2^4 \pi 21 dy + \int_4^{25} \pi[25 - y]dy$$

$$V = \pi 21 y|_2^4 + \pi[25y - \frac{y^2}{2}]|_4^{25}$$

$$V = 42\pi + \frac{441}{2}\pi = 262.5\pi \text{ miles de metros cúbicos de material noble en el casco circular.}$$

4.9.1. Ejercicios propuestos

1. Halle el volumen del sólido revolución al hacer girar la region plana al rededor del eje X, limitada por las curvas C_1: $y = x^2 - 4x - 2$, C_2: $y = 3 - 2x$ y las rectas $x = -1.5$ y $X = 3.5$, la figura de mostrada.

Respuesta: 394π unidades cúbicas.

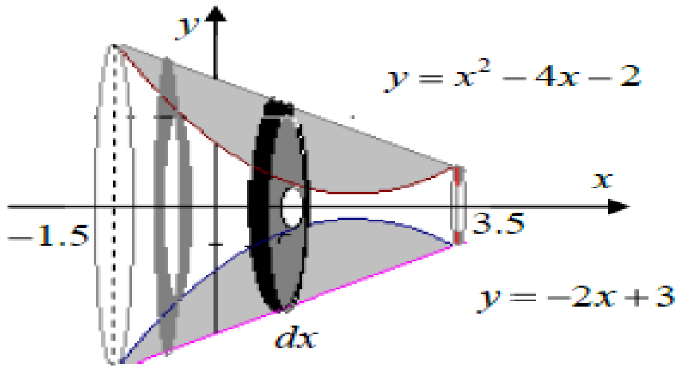


Figura 4.57: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

2. Halle el volumen del sólido revolución al hacer girar la región plana alrededor del eje X,limitada por las curvas C_1: $y = x^3 - 3x + 4$, C_2: $y = x^2$, que representa una copa de cobre, para una ceremonia de aniversario de una Institución Agropecuaria.

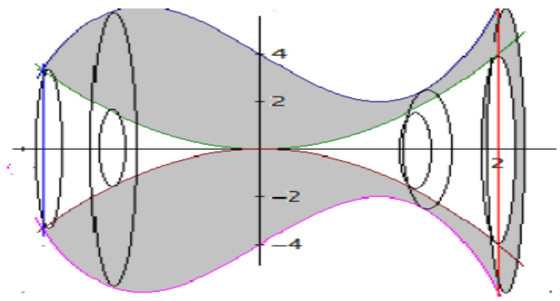


Figura 4.58: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

3. Halle el volumen revolución al hacer girar la region plana alrededor del eje X, limitada por las curvas $y = x^2 - 3x$, $y = -x^2 + 5x$ y las rectas $x = 0$, $x = -3.5$, el sólido representa un cobre de hierro galvanizado para un mostrario.

4. Halle el volumen del sólido revolución al hacer girar la region plana alrededor del eje X, limitada por la curva $y = x^3 - 4$, y las rectas $x = 2$, $x = -1$.

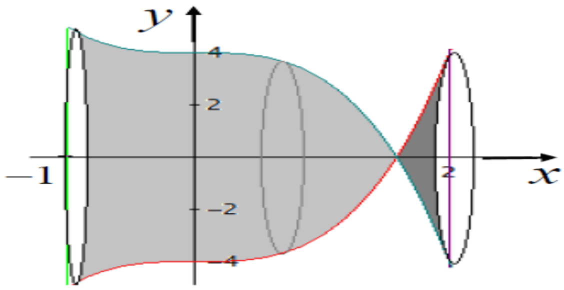


Figura 4.59: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

5. Halle el volumen del sólido revolución al hacer girar la region plana al rededor del eje Y, limitada por las curvas C_1: $y = 2x^2 + 2x - 3$, C_2: $y = x^2 + 1$ y la recta $y = 2$, la figura de mostrada.
   Respuesta: 22.5π unidades cúbicas.

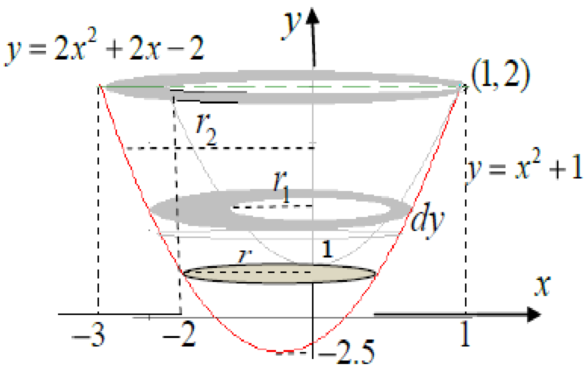


Figura 4.60: Volumen del sólido revolución:Rotación eje Y

6. Halle el volumen del sólido revolución que resulta de hacer girar la region plana alrededor del eje Y, limitada por la curva $y = 3x^3$ y las rectas $y = 24$, $x = 0$, que representa una copa de plomo.

7. Calcule el volumen del sólido revolución de hacer girar la región plana alrededor del eje X, limitado por las curvas C_1: $y = -3x^2 + 6x$, C_2: $y = x^3 - x^2$ y las rectas $x = 0$ hasta $x = 1.64$.
   Respuesta: 13.2π unidades cubicas.

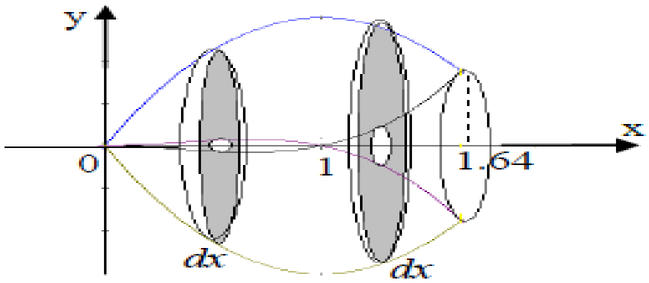


Figura 4.61: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

8. Halle el volumen del sólido revolución al hacer girar la region plana alrededor del eje X, limitada por las curvas $y = x^3 + 3x^2 + 2$, $y = 2x^2 + 10$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$. Respuesta: 180π unidades cúbicas

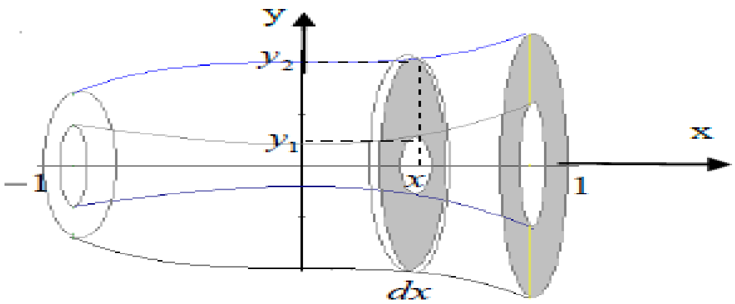


Figura 4.62: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

9. Halle el volumen del sólido revolución de hacer girar la region plana alrededor del eje Y, limitada por la curvas $y = -3x^2 + 9$, y la recta $x = 0$.
Respuesta:148.8π

10. Halle el sólido revolución de una region plana limitada por las curvas C_1: $y^2 = 9x$ y las rectas $x = 1$, $x = 3$ y que gira al rededor de la recta $y = 2$. El sólido revolución representa un trofeo de premio en un encuentro deportivo en la comunidad de La Joya en la ciudad de Puerto Maldonado, cuya representación gráfica en lo siguiente. Respuesta $V = 33$ unidades cúbicas.

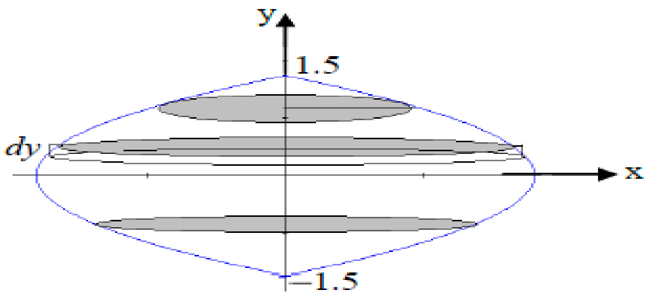


Figura 4.63: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

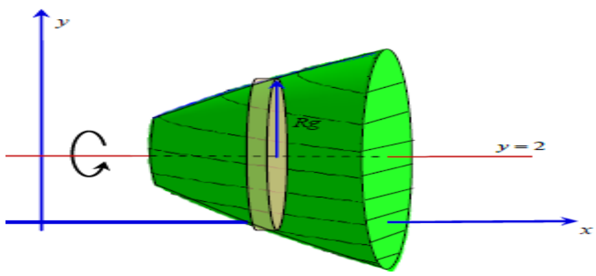


Figura 4.64: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

11. Halle el volumen revolución de una región plano limitada por las curvas C_1: $y = 1 + 2x - x^2$ y la recta $y = x - 1$, las variables de x e y estan en la escala de 1 cm y el sólido revolución gira al rededor de la recta $y = -2$, puesto que el sólido representa un cofre de cobre para guardar joyas de oro. La representación gráfica del cofre se muestra y la respuesta $V = \dfrac{108}{5}$ centímetros cúbicas.

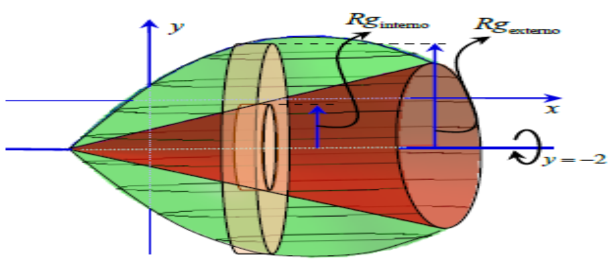


Figura 4.65: Volumen del sólido revolución:Rotación eje X

Capítulo 5

Geometría analítica tridimensional

Pre-Requisitos.- Para la comprensión adecuada de este tema de superficies, se requiere de los conocimientos previos de.

- Elementos de geometría plana: rectas, circunferencias, cónicas, etc.
- Elementos de geometría del espacio: planos, secciones planas de un cuerpo, etc.

Objetivos.- Al finalizar del estudio de este capitulo el alumno debe ser capaz de:

- Estudiar algunos aspectos sobre la naturaleza algebraica del espacio tridimensional, que será nuestro anfitrión durante el desarrollo de toda la obra insistiendo en la gran riqueza geométrica, la cual puede ser visualizada
- Brindar algunos conceptos importantes del algebra lineal que nos ayudarán en su momento a tener un lenguaje adecuado para entender varios temas que aparecen en el estudio del cálculo de las funciones cuyo dominio y/o codominio están en el espacio $\mathbb{R}^3$
- Establecer los fundamentos necesarios para el trazado de planos y rectas en el espacio $\mathbb{R}^3$, respecto a un sistema de coordenadas

5.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Considerando el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, que denotaremos por $\mathbb{R}^3$ (y leemos "erre tres")

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

A cada uno de los números reales x_1, x_2, x_3 que conforman la terna $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, se le llama componentes o coordenadas de la terna correspondiente. Las ternas que constituyen el conjunto $\mathbb{R}^3$ son ordenadas. De hecho, dos ternas de $\mathbb{R}^3$ se dicen ser iguales, cuando todas y cada una de sus coordenadas son iguales. Es decir que

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \Longleftrightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Un hecho de fundamental importancia en el conjunto $\mathbb{R}^3$ es que podemos definir en él dos operaciones entre sus elementos, las cuales cumplen con ciertas propiedades que veremos a continuación. Este hecho hace que tal conjunto tenga una estructura algebraica llamada *espacio vectorial* y que por lo tanto, nos podamos referir a él no sólo como el "conjunto $\mathbb{R}^3$". Las operaciones que definimos en $\mathbb{R}^3$ son:

Suma de ternas ordenadas

Si $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ son dos elementos de $\mathbb{R}^3$, definimos su suma, denotada por $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$, como

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Producto de una terna ordenada por un escalar

Si (x_1, x_2, x_3) es un elemento de $\mathbb{R}^3$ y c es un número real. El producto de la terna (x_1, x_2, x_3) por el escalar c, denotada por $c(x_1, x_2, x_3)$, se define como

$$c(x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_3, cx_3)$$

Es fácil verificar que estas operaciones entre los elementos de $\mathbb{R}^3$ cumplen con las propiedades siguientes:

1. La suma es conmutativa, es decir

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$$

2. La suma es asociativa, es decir

$$(x_1, x_2, x_3) + [(y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)] = [(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] + (z_1, z_2, z_3)$$

3. Existen un elemento en $\mathbb{R}^3$, llamado cero, que actúa de manera neutra para la suma, lo denotaremos por $\mathbf{0}$. Es decir $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y se tiene
$$(x_1, x_2, x_3) + (0,0,0) = (x_1, x_2, x_3)$$
4. Cada terna de $\mathbb{R}^3$ tiene un "inverso aditivo", el cual es un elemento de $\mathbb{R}^3$ que tiene la propiedad de que, sumado con la terna original produce cero (el cero de $\mathbb{R}^3$). De hecho, el inverso aditivo de (x_1, x_2, x_3) es $(-x_1, -x_2, -x_3)$, puesto que
$$(x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) = (0,0,0)$$
5. Si λ es un escalar, se tiene
$$\lambda[(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] = \lambda(x_1, x_2, x_3) + \lambda(y_1, y_2, y_3)$$
6. Si λ y μ son escalares, se tiene
$$(\lambda + \mu)(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(x_1, x_2, x_3)$$
7. Si λ y μ son escalares, se tiene
$$(\lambda\mu)(x_1, x_2, x_3) = \lambda[\mu(x_1, x_2, x_3)] = \mu[\lambda(x_1, x_2, x_3)]$$
8. $1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

Así, el conjunto $\mathbb{R}^3$ se convierte en un espacio vectorial con las operaciones que en él hemos definido. De aquí en adelante nos referiremos a $\mathbb{R}^3$ como el "espacio $\mathbb{R}^3$" y a sus elementos (las ternas ordenadas) como "vectores".

Definición 5.1 *Un conjunto* $\mathbb{V}$ *no vacío de una operación interna suma y una operación externa del producto de un elemento del conjunto* $\mathbb{V}$ *por un escalar del cuerpo* $\mathbb{R}$*, se dice que tiene una estructura de* $\mathbb{R}$ *espacio vectorial si verifican las siguientes propiedades, [9],[22]:*

Para la suma en $\mathbb{R}$.

1. Asociativa

2. conmutativa

3. Existencia del elemento neutro aditivo O

4. Elemento Opuesto

Para el producto por un escalar de $\mathbb{R}$.

1. Distributiva respecto de la suma de vectores

2. Distributiva respecto a la suma de escalares

3. Seudoasociativa

4. Existencia del elemento unidad que se denotara 1.

Representacion de un vector tridimensional

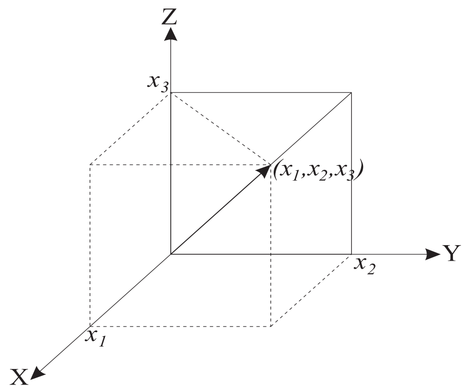


Figura 5.1: Vectores en $\mathbb{R}^3$

Resta de un vector tridimensional

La resta de vectores en $\mathbb{R}^3$, digamos $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, se define como

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

Visualizar geométricamente el espacio $\mathbb{R}^3$. En efecto, dado un vector $\mathbf{v}$, podemos ver a éste como el punto correspondiente del espacio tridimensional que tiene por-coordenadas a las coordenadas de $\mathbf{v}$. Otro modo de ver o analizar en comportamiento vectorial es como una flecha que parte del origen de coordenadas y llega al punto en cuestión. Mas aún, toda “flecha” en el espacio, puede ser pensada como un vector de $\mathbb{R}^3$. En efecto, supongamos que la flecha tiene su inicio en el punto $\mathbf{p}$ y su final en el punto $\mathbf{q}$. A ella asociamos el vector $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$. Es fácil ver que la flecha asociada a este vector $\mathbf{v}$, que parte del origen y llega al punto $\mathbf{q} - \mathbf{p}$, es “equivalente” (en el sentido del movimiento rígidos) a la flecha original que partía de $\mathbf{p}$ y llegaba a $\mathbf{q}$

Es interesante notar que las operaciones definidas en el espacio $\mathbb{R}^3$ pueden ser visualizadas, al igual que algunas de las propiedades de ellas, con la ayuda de las versiones geométricas (las flechas) de los vectores. En efecto, se puede ver fácilmente que la suma de vectores no es más que la “regla del paralelogramo” conocida en el manejo de flechas (“vectores geométricos”) como se muestra en la figura 5.2

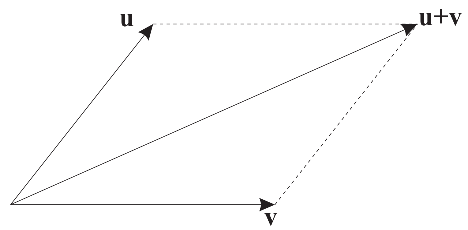


Figura 5.2: La suma de vectores

La operación de resta de vectores, digamos $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, equivale a tomar el vector (la flecha) que comienza en el punto $\mathbf{y}$ y termina en el punto $\mathbf{x}$ como se muestra en la figura 5.3

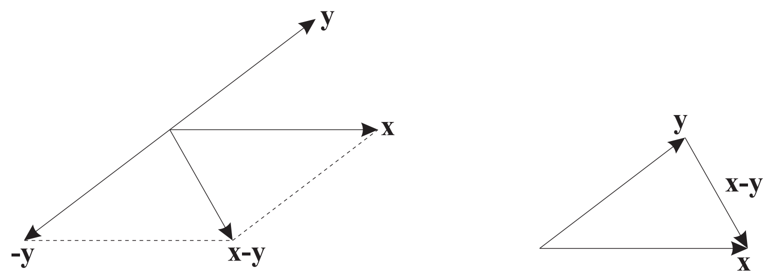


Figura 5.3: La resta de vectores

Con la ayuda de la figura 5.4, queda clara la propiedad asociativa de la suma de vectores en el espacio.

Por otra parte; la multiplicación del vector $\mathbf{v}$ por el escalar λ produce un nuevo vector $\lambda\mathbf{v}$ (del que diremos que es un “múltiplo escalar” de $\mathbf{v}$) que, conservando la

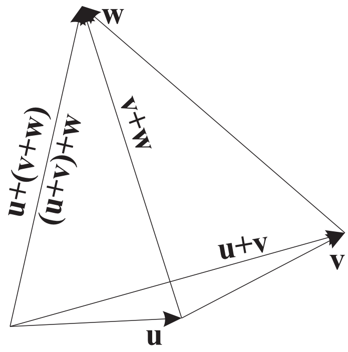


Figura 5.4: Propiedad asosiativa de la suma

linea de acción de **v**, se alarga (si $\lambda > 1$) o se contrae (si $0 < \lambda < 1$) manteniendo la misma dirección de **v**, o invirtiendo tal dirección (si $\lambda < 0$), como se ilustra en la figura 5.5

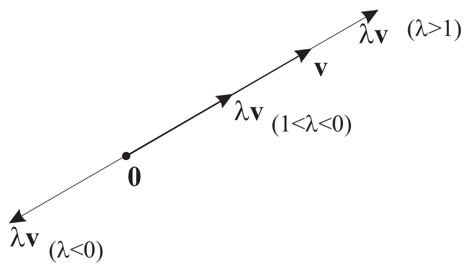


Figura 5.5: El producto del vector **v** por el escalar λ

Dado un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, decimos que el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ si existen escalares c_1, c_2, c_3 tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Teorema 5.1.1 *Sea S un subconjunto no vacío del espacio $\mathbb{R}^3$. Entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ si y solamente si:*

1. *dados $x, y \in S$, se tiene $x + y \in S$*
2. *dados $x \in S$, $c \in \mathbb{R}$, se tiene $cx \in S$*

Ejemplo 5.1.1 *El vector (7,2,3) es combinación lineal de los vectores (2,1,1), (2,1,0) y (1,0,0)*

En efecto, $(7,3,2) = c_1(2,1,1) + c_2(2,1,0) + c_3(1,0,0)$

$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 7 \\ c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3,\ c_2 = -1, c_3 = 3$$

Entonces $(7,2,3) = 3(2,1,1) - 1(2,1,0) + 3(1,0,0)$

Definición 5.2 *Un conjunto de vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ *se dice ser* ***linealmente independiente*** *(abreviaremos L.I.) si la combinación lineal*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Obliga a que todos los escalares c_1, c_2, c_3 *sean ceros. Es decir, si se tiene la implicación*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Caso contrario, se dice que son ***linealmente dependiente*** *(abreviado L.D.). Es decir, si se puede tener la combinación lineal* $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ *con no todos los escalares* c_1, c_2, c_3 *iguales a cero, [9], [22].*

Se dice que un conjunto formado por 3 vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$, si estos vectores son linealmente independientes.

Si $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base del espacio $\mathbb{R}^3$, entonces cada vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal (única) de los vectores de β.

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ son una base de este espacio si y sólo si

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \neq 0$$

Ejemplo 5.1.2 *Los vectores* $\mathbf{v}_1 = (2,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (2,1,0)$ *y* $\mathbf{v}_3 = (1,0,0)$ *forman una base de* $\mathbb{R}^3$*, puesto que ellos son L.I., hecho que se deduce del valor no nulo del*

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Ejemplo 5.1.3 *Los vectores* $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,3,8)$ *no forman una base de* $\mathbb{R}^3$ *por que son L.D., ya que*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} = 0$$

5.2. Producto punto. Proyecciones

En el espacio $\mathbb{R}^3$ podemos definir un tipo de producto entre sus elementos (los vectores del espacio) con la cual este espacio se llena de una gran riqueza geométrica que nos permita adentrarnos más en la "esencia" misma de la naturaleza del él. Este producto es el conocido "producto punto", el cual no es más que un tipo de "producto interno" que se puede definir en un espacio vectorial en general.

Definición 5.3 *El producto punto en* $\mathbb{R}^3$ *es una función* $\cdot\ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *que a cada par de vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *le asocia un número real* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *(llamado también "producto de* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$*"; se usa también la notación* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$*) dado por*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

en el que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, *[22].*

Teorema 5.2.1 *El producto punto* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *de dos vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}$
4. $(c\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

El teorema nos dice que el producto punto es una función definida positiva (propiedad 1), simétrica (propiedad 2), y lineal respecto de su primera variable (propiedad 3 y 4). Juntando este último hecho, con la simetría del producto punto, concluimos que éste es lineal también respecto de su segunda variable, de modo que es entonces una función bilineal.

Teorema 5.2.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *dos vectores cualesquiera en* $\mathbb{R}^3$. *Entonces*

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$$

Definición 5.4 *Se dice que los vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *son ortogonales si* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Según esta definición, el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ es ortogonal a cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, pues es claro que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{y} = 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Más aún, es el vector cero el único de $\mathbb{R}^3$ con esta propiedad, [9].

Ejemplo 5.2.1 *Sea* $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, *el conjunto de vectores* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *ortogonales a* $\mathbf{u}$ *está formado por los vectores* $\mathbf{v} = (x, y, z)$ *de modo que* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x - y + 2z = 0$

La ecuación $x - y + 2z = 0$ representa geométricamente un plano que pasa por el origen.

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$ se dice ser ortogonal si tomados dos a dos, estos son ortogonales.

Pasaremos ahora a discutir el importante concepto de proyección de un vector sobre otro. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$. Tomemos la proyección ortogonal del vector $\mathbf{y}$ sobre el vector $\mathbf{x}$. Denotemos por $\mathbf{u}$ a este vector proyección (usaremos también la notación $\mathbf{PR}_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}}$)

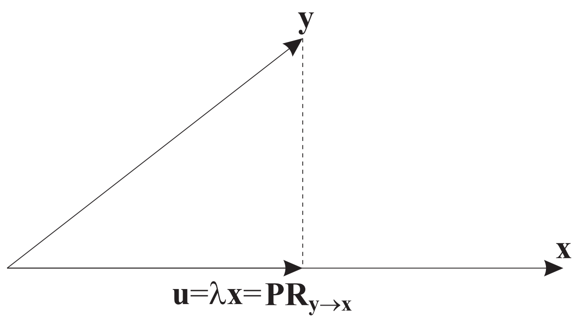


Figura 5.6: La proyección ortogonal del vector $\mathbf{y}$ sobre el vector $\mathbf{x}$

Es claro que el vector $\mathbf{u}$ es múltiplo escalar del vector $\mathbf{x}$. Es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$. Obsérvese además que el vector $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{u}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{x}$. Entonces $(\mathbf{y} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{x} = 0$, o bien $(\mathbf{y} - \lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0$, de donde, usando las propiedades de linealidad del producto punto, obtenemos que

$$\lambda = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

y así la proyección de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{x}$ es el vector

$$\mathbf{PR}_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{x}$$

Ejemplo 5.2.2 *Si los vectores* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *son ortogonales, geométricamente es claro que* $\mathbf{PR}_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}$ *y* $\mathbf{PR}_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}}$ *son iguales (al vector) cero, lo cual se puede ver también de la fórmula para la proyección ortogonal, pues* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$*. También, si* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *es un vector cualquiera de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbf{e}_i$ *es el i-ésimo vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*, entonces, puesto que* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i = x_i$ *y* $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i = 1$*, se tiene*

$$\mathbf{PR}_{\mathbf{x}\to\mathbf{e}_i} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i = x_i\mathbf{e}_i$$

como era de esperarse.

5.3. Norma y distancia

Definición 5.5 *Definimos la norma (de modo más preciso, la norma euclidiana) de un vector* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$*, denotada por* $\|\mathbf{x}\|$*, como*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$$

, [9], [22].

En concreto, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, se tiene

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Diremos que el vector $\mathbf{x}$ es unitario si $\|\mathbf{x}\| = 1$. Obsérvese que los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$,$\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$. La noción de norma de un vector, nos da una medida del “tamaño” del vector.

Teorema 5.3.1 *Sea* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$*, y c un número real se tiene*

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0,\ \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2. $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$

3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(desigualdad triangular)*

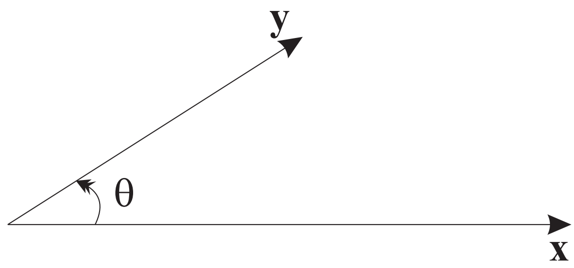


Figura 5.7: El ángulo θ entre los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

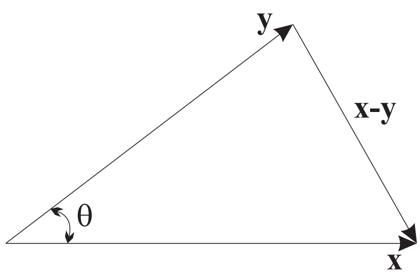
Definición 5.6 *Introducimos el concepto de ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$. En efecto, sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no nulos, como el produto interior de los vectores y divididos por los módulos de los mismos, resultando reales o nulos y el ángulo está compredida en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, Figura 5.7.*

De la figura 5.7 es inmediato que el ángulo θ que forman $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es tal que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\|\mathbf{PR}_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}, \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{y}\neq\mathbf{0} \\ \theta &= \arccos\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}, \quad 0\leq\theta\leq\pi \end{aligned}$$

Ley de cosenos

Si calculamos directamente el cuadrado, de la norma de vector diferencia $\mathbf{x}-\mathbf{y}$,



$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$

Figura 5.8: Ley de los cosenos

obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta \end{aligned}$$

La cual no es más que la versión (generalizada) para vectores en $\mathbb{R}^2$ de la conocida "ley de los cosenos" que se estudia en los cursos de trigonometría elemental

Distancia entre dos vectores

Estudiemos ahora el concepto de distancia entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, definimos la distancia entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, denotada por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Esquemáticamente se tiene.

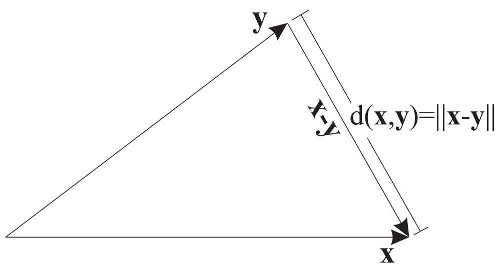


Figura 5.9: Distancia entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, entonces se tiene

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Teorema 5.3.2 *Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$. Se tiene*

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$

Ejemplo 5.3.1 *La distancia entre el vector $\mathbf{x} = (2, 3, 1)$ y el vector $\mathbf{y} = (1, -1, 2)$ es*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|(2, 3, 1) - (1, -1, 2)\| = \|(1, 4, -1)\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Ejemplo 5.3.2 *Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| = 4,\ \|\mathbf{y}\| = 5,\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 7$. Calculemos $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 &= 49 \\
16 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + 25 &= 49 \\
2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 8
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 = 16 - 8 + 25 = 33$$

Entonces $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{33}$

5.4. El producto cruz en $\mathbb{R}^3$

En esta sección estudiaremos un nuevo producto entre vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ (ya hemos considerado el producto punto entre estos vectores). Con el podremos estudiar las ecuaciones de planos en $\mathbb{R}^3$, junto con las ecuaciones de las rectas en $\mathbb{R}^3$. Una diferencia fundamental de este nuevo producto que estudiaremos ahora, es que éste será un nuevo vector de $\mathbb{R}^3$, mientras que el producto punto es, como sabemos, un escalar

Definición 5.7 *Sean* $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ *y* $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ *dos vectores de* $\mathbb{R}^3$*. El producto cruz de* $\mathbf{u}$ *con* $\mathbf{v}$*, denotado por* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$*, es el vector de* $\mathbb{R}^3$ *dado por*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Una de las propiedades fundamentales que caracterizan al vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, es que éste es perpendicular a ambos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Más aún, el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es un vector perpendicular a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, y su dirección se rige según la "regla de la mano derecha".

Puesto que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, se dice que el producto cruz es anticonmutativo.

Al igual que el producto punto, el producto cruz tiene un comportamiento lineal respecto de sus dos variables con más precisión, se tiene, con $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}') \times \mathbf{v} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + (\lambda\mathbf{u}') \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}) \\
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}') &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}') = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}')
\end{aligned}$$

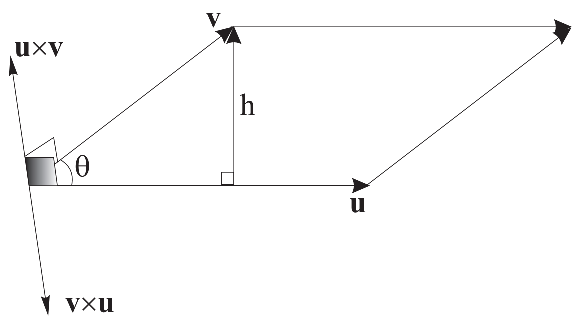
Obsérvese entonces que el producto cruz, al igual que el producto punto, es distribuido.

Para la norma del producto cruz de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, se tiene

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$$

Siendo θ el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Si consideramos el paralelogramo cuyos lados son los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, el área que este encierra se calcula como la base (la norma de uno de los vectores) por la altura, la cual es la norma del otro vector multiplicada por el (valor absoluto del) seno del ángulo que forman los vectores figura (5.10). Entonces, según la fórmula mencionada, el área del paralelogramo es justamente la norma del producto cruz de los vectores que lo generan



$$\begin{aligned}
\text{base} &= \|\mathbf{u}\| \\
\text{altura} &= \|\mathbf{v}\||\operatorname{sen}\theta| \\
\text{área} &= (\text{base})(\text{altura}) \\
&= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\operatorname{sen}\theta| \\
&= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|
\end{aligned}$$

Figura 5.10: Paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

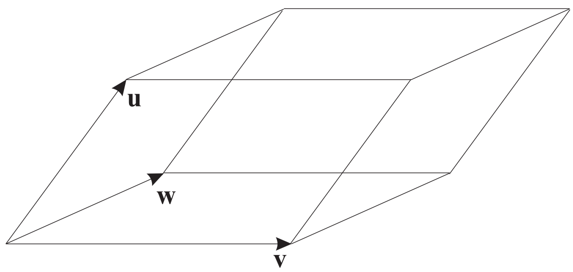
Combinemos ahora el producto cruz de dos vectores con el producto punto. Dados dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, su producto cruz es un vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ con el que podemos tomar el producto punto con otro vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, para formar así el escalar

$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. A éste se le conoce como **triple producto** (escalar) de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Si $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ y $\mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3)$, podemos escribir

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{uvw}]$$

El escalar resultante del triple producto escalar de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tiene una interpretación geométrica interesante: consideremos el paralelepípedo generado por los tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (véase la figura 5.11) el cual tiene por el volumen V al área A de su base multiplicada por su altura H. El área A de su base es el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Esta es, según se vio anteriormente, la norma $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ la altura del paralelepípedo se puede calcular como la norma de la proyección del vector restante $\mathbf{u}$ sobre un vector perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$. Entonces el volumen del paralelepípedo es

$$V = A \cdot H = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |[\mathbf{uvw}]|$$



Volumen=$|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$

Figura 5.11: Paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

Ejemplo 5.4.1 *Consideremos los vectores* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *de la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *se tiene* $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. *Esquemáticamente podemos pensar en un triángulo como el siguiente*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{i} \arrow[dl] & \\
\mathbf{j} \arrow[rr] & & \mathbf{k} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

El producto de cada uno de dos vértices (en el sentido indicado) es igual al tercer vértice.

Ejemplo 5.4.2 *Consideremos los vectores* $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$. *El triple producto escalar de estos vectores es*

$$[\mathbf{uvw}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2 + 6) - (3 + 4 + 1) = 1$$

5.5. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

La intención de esta sección es familiarizarnos con algunos tipos importantes de ecuaciones de planos y restas en el espacio $\mathbb{R}^n$, pues todos los conceptos diferenciables del cálculo que se estudiaran tendrán su contenido geométrico al involucrar este tipo de lugares geométricos de $\mathbb{R}^n$, los que son si duda alguna los más simples que existen. En el caso del plano $\mathbb{R}^2$, el lugar geométrico más simple que existe es la recta. Este es, por así decirlo, el prototipo de comportamiento "simple" y "decente" propio de una curva en el plano. La matemática involucrada en el estudio de estos "entes lineales" del plano es sencilla y cristalina, todos los resultados son "fáciles" de establecer alrededor de comportamientos lineales. Precisamente la intención del cálculo (diferencial) es *cambiar (localmente) el estudio de comportamientos "complicados" de funciones por comportamientos lineales los cuales se tienen "bien estudiados"*. Así, a una función $y = f(x)$ ("comportamiento complicado de x con y"), se le asigna, en un punto, una recta tangente ("comportamiento lineal que aproxima, a la función") cuyas propiedades no darán información de la función misma (en torno al punto en cuestión)

5.5.1. Ecuación del plano

Un plano $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$ queda completamente determinado si se conocen:

- Un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ por el que pasa ($\mathbf{P}_0$: "punto de paso")

- Un vector normal a él, digamos $\mathbf{n} = (a, b, c)(\mathbf{n} \perp \mathcal{P},\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0})$

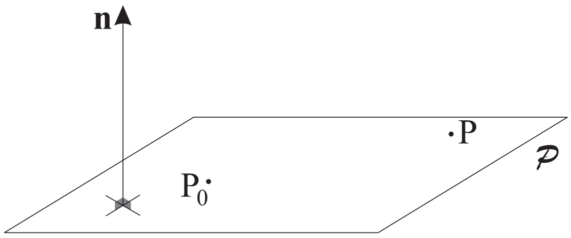


Figura 5.12: Un plano$\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{P}_0$ y tiene $\mathbf{n}$ como vector normal.

Así pues, el plano $\mathcal{P}$ queda determinado como el lugar geométrico de aquellos puntos $\mathbf{P} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = 0 \\
\mathcal{P} &: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
\mathcal{P} &: ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0 \\
\mathcal{P} &: ax + by + cz + d = 0
\end{aligned}$$

Suponemos ahora que nos dan tres puntos por los que pasa el plano $\mathcal{P}$, digamos $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{P}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Estos tres puntos pueden determinar el plano $\mathcal{P}$ de la siguiente manera

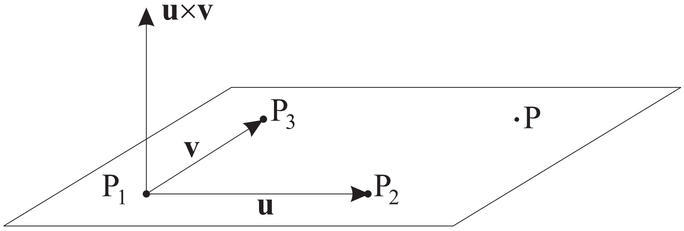


Figura 5.13: Plano determinado por tres puntos no colineales

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) = 0 \\
\mathcal{P} &: (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot ((\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1)) = 0 \\
\mathcal{P} &: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Si el plano $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, $d = 0$, entonces el plano pasa por el origen de coordenadas.

Un plano $\mathcal{P}$ queda determinado completamente si se conocen : Un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ($\mathbf{P}_0$: "punto de paso") y dos vectores no paralelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{A} + r\mathbf{B}, \quad t, r \in \mathbb{R} \\ \mathcal{P} &: (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$

- Dos planos son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos ($\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$).
- Dos planos son secantes si y sólo si sus vectores normales son no paralelos ($\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \neq \mathbf{0}$).
- Dos planos son perpendiculares si y sólo si sus vectores normales son ortogonales ($\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$)
- Dos planos $\mathcal{P}_1 : (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : (\mathbf{P} - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ son coincidentes si y sólo si $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ y $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$, donde $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$.
- Dos planos $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ son coincidentes si y sólo si
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$
- El ángulo diedro entre dos planos está determinado por el ángulo entre sus normales.

Ejemplo 5.5.1 *Encuentrese un ángulo entre los dos planos* $\mathcal{P}_1 : 4x + 3y + z = 0$ *y* $\mathcal{P}_2 : x + y - z = 15$

Resolución.

Las normales son $\mathbf{n}_1 = (4, 3, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, 1, -1)$ respectivamente. Si θ es el ángulo entre los planos, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|} = \frac{4(1) + 3(1) + 1(-1)}{\sqrt{26}\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{78}} \cong 0,679$$

y $\theta \cong 47°12'$ ó $\theta \cong 312°48'$

5.5.2. Ecuación de la recta

Para determinar una recta en el espacio es suficiente conocer

a) Un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ por el cual pasa ($\mathbf{P}_0$: "punto de paso")

b) Un vector $\mathbf{V} = (a, b, c)$ paralelo a la recta ($\mathbf{V}$: "vector direccional"), $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$

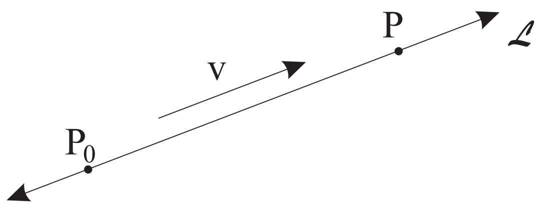


Figura 5.14: La recta

Así pues, la recta $\mathcal{L}$ queda determinada como el lugar geométrico de aquellos puntos $\mathbf{P} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\mathcal{L} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

llamada *ecuación paramétrica vectorial de la recta la* en $\mathbb{R}^3$

Haciendo explícita esta condición se tiene

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

conocida como las ecuaciones paramétricas de la recta (el número real t es "el parámetro").

Nótese que, despejando e igualando el parámetro t de cada una de las ecuaciones paramétricas de la recta, la ecuación anterior también se puede escribir como

$$\mathcal{L} : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Conocida como la ecuación simétrica de la recta $\mathcal{L}$ en $\mathbb{R}^3$. Dadas dos rectas $\mathcal{L}_1 : \mathbf{P}_1 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2 : \mathbf{P}_2 + r\mathbf{u},\ r \in \mathbb{R}$

♢ Son coincidentes si y sólo si $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 \ \parallel\ \mathbf{v} \parallel \mathbf{u},\ \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 \neq \mathbf{0}$

$\diamondsuit$ Son paralelas disjuntas si y sólo si $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 \quad \nparallel \ \mathbf{v} \ \parallel \ \mathbf{u}$

$\diamondsuit$ Son secantes si y sólo si $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u} = 0$

$\diamondsuit$ Son cruzadas o alabeadas si y sólo si $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u} \neq 0$

$\diamondsuit$ Son ortogonales si y sólo si $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$

Ejemplo 5.5.2 *Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos* $\mathbf{P}_1 = (3,5,4)$ *y* $\mathbf{P}_2 = (5,6,7)$

Resolución

La ecuación vectorial de la recta, está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &: \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = (2,1,3) \\ \mathcal{L} &: \mathbf{P} = (3,5,4) + t(2,1,3), t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.3 *Determine la recta que pasa por el punto (1,-5,6) paralela a la normal al plano que contiene a los puntos* $(0,1,2), (3,2,6)$ *y* $(-2,0,5)$.

Resolución.

- Sea $\mathbf{A} = (3,2,6) - (0,1,2) = (3,1,4)$ y $\mathbf{B} = (-2,0,5) - (0,1,2) = (-2,-1,3)$
- $\mathbf{n} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es una normal a $\mathcal{P}$, luego

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (7,-17,-1)$$

- $\mathcal{L} : \mathbf{P} = (1,-5,6) + t(7,-17,1), \ t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 5.5.4 *Encuentre los puntos de intersección de los dos planos* $\mathcal{P}_1 : 4x+3y+z=0$ *y* $\mathcal{P}_2 : x+y-z=15$

Resolución

- $\mathbf{A} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4,5,1) \ \parallel \ \mathcal{L}$
- $\mathbf{P}_0 = (3,0,-12) \in \mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2$

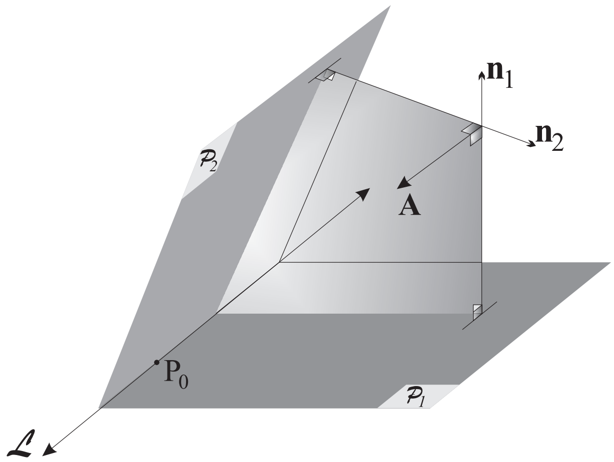


Figura 5.15: Intersección entre planos

- $\mathcal{L} : \mathbf{P} = (3, 0, -2) + t(4, -5, -1), \;\; t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 5.5.5 *Encuentre la distancia de un punto* $\mathbf{Q}$ *al plano* $\mathcal{P} : \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = 0$

Resolución

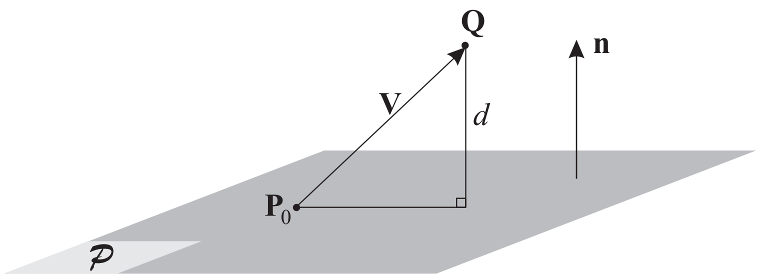


Figura 5.16: Distancia de punto a plano

- $d(\mathbf{Q}, \mathcal{P}) = \|\mathbf{PR}_{\mathbf{v}\to\mathbf{n}}\| = \left\| \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \dfrac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \right\| = \dfrac{|(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$

Observación: Si $\mathbf{Q} = (x_0, y_0, z_0), \;\; \mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, entonces

$$d(\mathbf{Q}, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Consideremos la recta $\mathcal{L} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{A}, \;\; t \in \mathbb{R}$, donde $\mathbf{A} = (a, b, c)$ es el vector "direccional", sean además α, β y γ ángulos formados por los semiejes coordenados positivos y el vector $\mathbf{A}$.

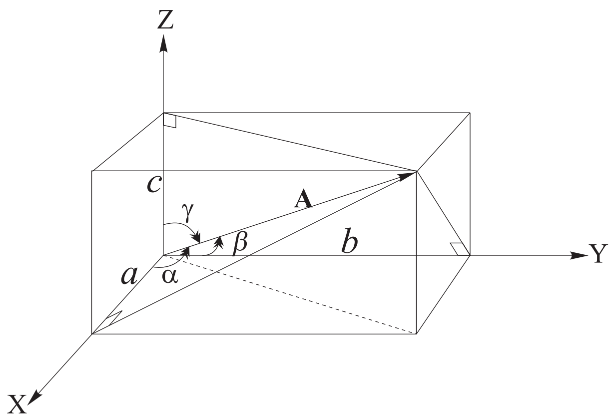


Figura 5.17: Números, ángulos y cosenos directores

Ejemplo 5.5.6 *Sean las rectas no paralelas* $\mathcal{L}_1 : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{A},\ t \in I\!R$ *y* $\mathcal{L}_2 : \mathbf{P} = \mathbf{Q}_0 + r\mathbf{B},\ r \in I\!R$*. Halle una fórmula para la distancia mínima entre* $\mathcal{L}_1$ *y* $\mathcal{L}_2$*.*

Resolución

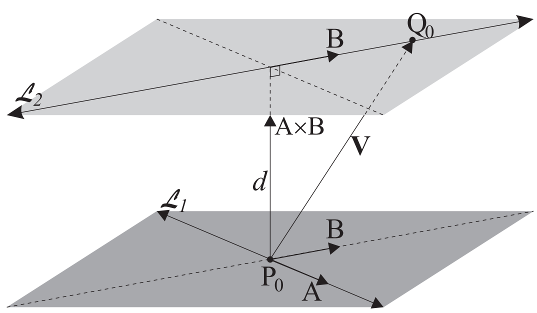


Figura 5.18: Distancia entre rectas cruzadas

- $d \|\mathbf{PR}_{\mathbf{v} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}}\| = \left\| \dfrac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|} \dfrac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|} \right\| = \dfrac{|[\mathbf{VAB}]|}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|}$

5.6. Superficies cilíndricas y cuadráticas

5.6.1. Superficie cilíndrica

Es la superficie generada por una linea recta (generatriz) que se desplaza paralelamente en una dirección dada a lo largo de una curva (directriz)

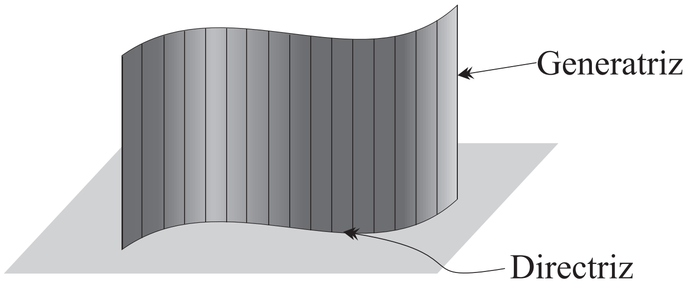


Figura 5.19: Superficie cilíndrica

5.6.2. Cilindro

Es un cuerpo limitado por una superficie cilíndrica cuya directriz es cerrada y por dos planos paralelos, que son las bases del cilindro.

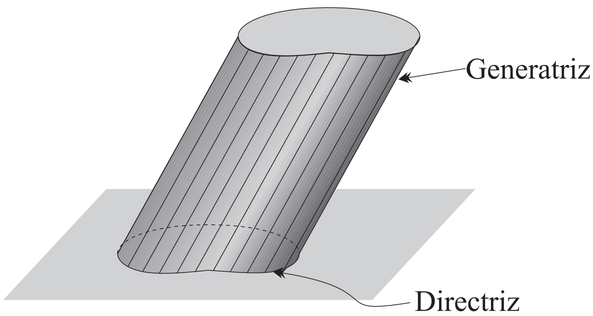


Figura 5.20: Cilindro

5.6.3. Cilindro circular recto

Es un cuerpo limitado por una superficie cilíndrica directriz es cerrada y por dos planos paralelos, donde sus generatrices son perpendiculares al plano de la base.

Ejemplo 5.6.1 .

Cilindro elíptico: $\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Cilindro hiperbólico: $\mathcal{H}: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

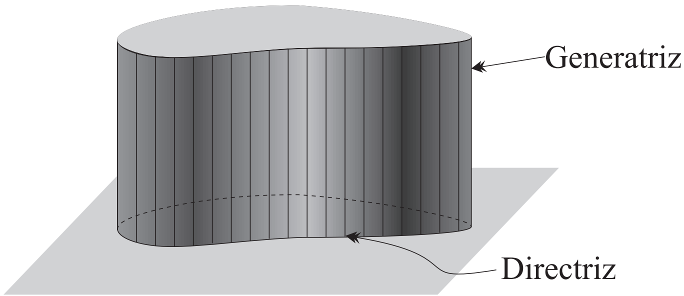


Figura 5.21: Cilindro recto

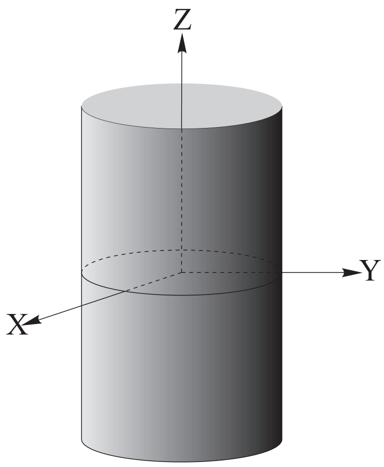


Figura 5.22: Cilindro elíptico

Cilindro parabólico: $\mathcal{P} : y^2 = 4px$

5.6.4. Superficies con centro

Las ecuaciones que vienen insertadas a continuación están dadas en forma canónica, o sea, el centro de la superficie (el punto en que todas las cuerdas que pasan por éste se divide por la mitad) está situado en el origen de coordenadas y como ejes de coordenadas se ha tomado los ejes de simetría de la superficie.

En este caso los planos coordenados son los planos de simetría.

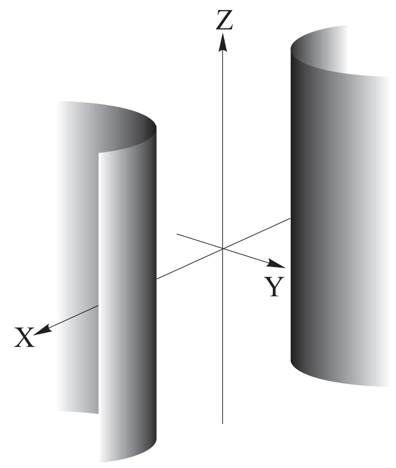


Figura 5.23: Cilindro hiperbólico

Esfera: $\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Plano	Traza
$XY: \; z = 0$	$x^2 + y^2 = a^2$: circunferencia
$XZ: \; y = 0$	$x^2 + z^2 = a^2$: circunferencia
$YZ: \; x = 0$	$y^2 + z^2 = a^2$: circunferencia

Elipsoide: $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, a, b, c son los semiejes

Plano	Traza
$XY: \; z = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: Elipse
$XZ: \; y = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$: Elipse
$YZ: \; x = 0$	$\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$: Elipse

Si $a = b > c$ se tiene el elipsoide de revolución achatado, que se obtiene haciendo girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, perteneciente al plano OXZ, alrededor de su eje menor. Si $a = b < c$ se tiene el elipsoide de revolución alargado que se obtiene haciendo girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, perteneciente al plano OXZ, al rededor de su eje mayor. Si $a = b = c$ se tiene la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Cualquier plano corta al elipsoide por una elipse (en el caso particular por una circunferencia). El volumen del elipsoide es igual a $\dfrac{4}{3}\pi abc$.

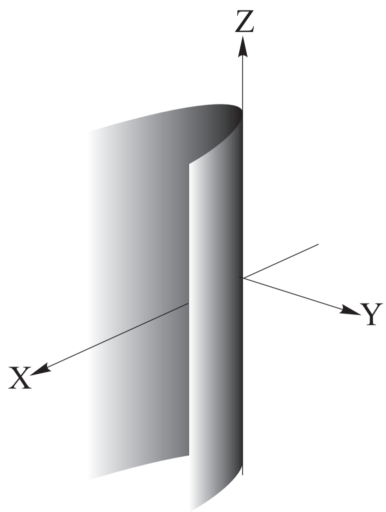


Figura 5.24: Cilindro parabólico

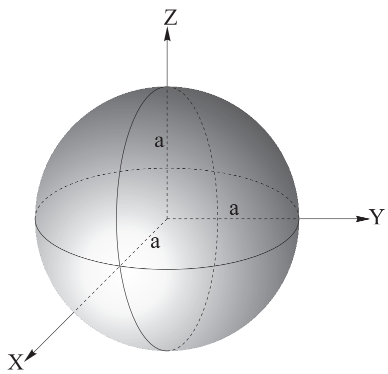


Figura 5.25: Esfera

Hiperboloide de una hoja: $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, a y b son los semiejes reales y c es el semieje imaginario.

Plano	Traza
$XY: \ z = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: Elipse
$XZ: \ y = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$: Hiperbola
$YZ: \ x = 0$	$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$: Hiperbola

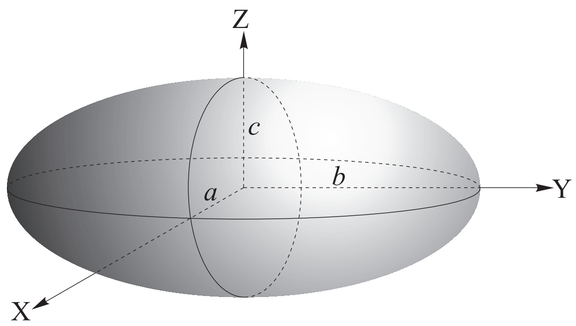


Figura 5.26: Elipsoide

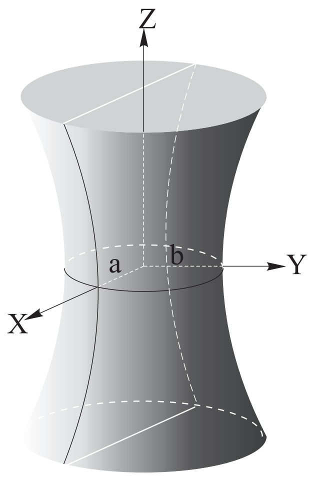


Figura 5.27: Hiperboloide de una hoja

Hiperboloide de dos hojas: $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, c es el semieje real a y b son los semiejes imaginarios.

Plano	Traza
$XY: \ z = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$: vacio
$XZ: \ y = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$: Hiperbola
$YZ: \ x = 0$	$\dfrac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$: Hiperbola

Para ambos hiperboloides las secciones paralelas al eje OZ son hipérbolas (para el hiperboloide de una hoja puede ser un par de rectas concurrentes) y las secciones paralelas al plano OXY son elipses.

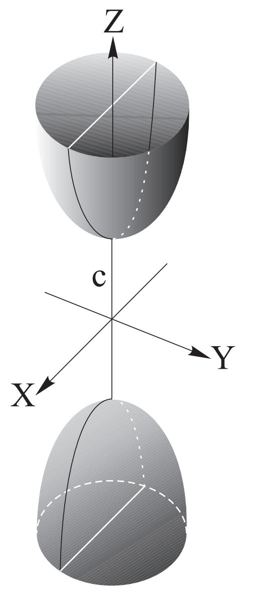


Figura 5.28: Hiperboloide de dos hojas

Si $a = b$, el hiperboloide puede ser obtenido por revolución de la hipérbola, con semiejes a y c, alrededor del eje $2c$, que es imaginario en el caso del hiperboloide de una hoja y real en el caso del hiperboloide de dos hojas.

Cono: $\mathcal{C} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$; se tiene el vértice en el origen de coordenadas y por directriz se puede tomar una elipse con semiejes a y b cuyo plano sea perpendicular al eje OZ y esté a la distancia c del origen de coordenadas. Este cono es asintótico a los dos hiperboloides $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1$, es decir, cualquiera de sus generatrices se aproxima a ambos hiperboloides al alejarse al infinito. Si $a = b$, se tiene un cono circular recto.

Plano	Traza
$XY: \ z = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$: punto (0,0)
$XZ: \ y = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$: Rectas
$YZ: \ x = 0$	$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$: Rectas

Paraboloide: Los paraboloides no tienen centro, en las ecuaciones dadas a continuación, el vértice del paraboloide se coloca en el origen de coordenadas, el eje OZ es el eje de simetría y los planos XOZ y YOZ son los planos de simetría.

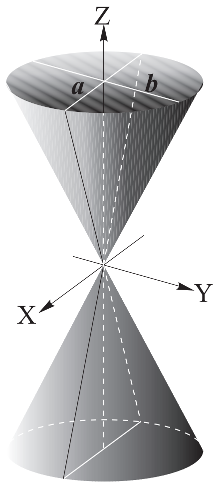


Figura 5.29: Cono

Paraboloide Elíptico: $\mathcal{P} : z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. Las secciones paralelas al eje OZ son parábolas, las secciones paralelas al plano XOY, son elipses. Si $a = b$ se tiene un paraboloide de revolución que resulta al hacer girar la parábola $z = \frac{x^2}{a^2}$, perteneciente al plano XOZ, al rededor de su eje.

Plano	Traza
$XY: \ z = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: punto (0,0)
$XZ: \ y = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} = z$: Parábola
$YZ: \ x = 0$	$\dfrac{y^2}{b^2} = z$: Parábola

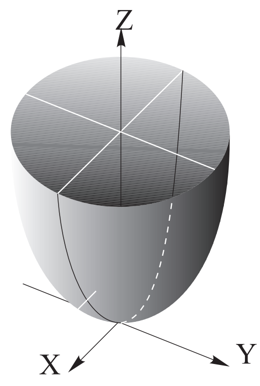


Figura 5.30: Paraboloide elíptico

Paraboloide hiperbólico: $\mathcal{P} : z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$. Las secciones paralelas al plano YOZ son parábolas iguales; las secciones paralelas al plano YOZ son parábolas iguales; las secciones paralelas al plano XOY son hipérbolas (o también un par de rectas concurrentes).

Plano	Traza
$XY:\ z=0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: Rectas
$XZ:\ y=0$	$\frac{x^2}{a^2} = z$: Parábola
$YZ:\ x=0$	$-\frac{y^2}{b^2} = z$: Parábola

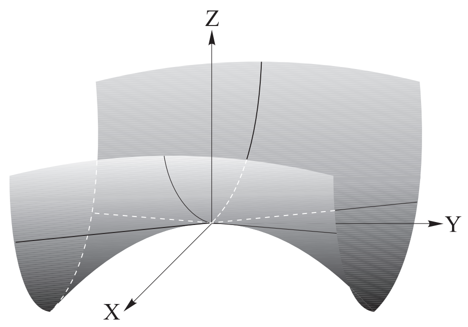


Figura 5.31: Paraboloide hiperbólico

5.7. Coordenadas cilíndricas y esféricas

En esta sección introduciremos dos nuevos sistemas coordenados es el espacio $\mathbb{R}^3$, los cuales jugarán un papel fundamental en algunos cálculos que se harán con integrales triples.

5.7.1. Sistemas de coordenadas cilíndricas

Dado un punto $\mathbf{P} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, asociamos a él la terna (r, θ, z) donde (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección $\mathbf{P}'$ del punto $\mathbf{P}$ en el plano XY (es decir, (r, θ) son las coordenadas polares del punto $\mathbf{P}' = (x, y, z)$). Decimos que los elementos de la terna (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas del punto $\mathbf{P}$ (figura 5.32).

La ecuación $r = r_0$ $(r_0 > 0)$ es, en el sistema cilíndrico, la ecuación de un cilindro (circular recto) cuyo eje es el eje Z, en ella se establece que los puntos $\mathbf{P} = (r, \theta, z)$ que la satisfacen son puntos de $\mathbb{R}^3$ cuya proyección $\mathbf{P}'$ en el plano XY siempre dista del origen una cantidad constante igual a r_0

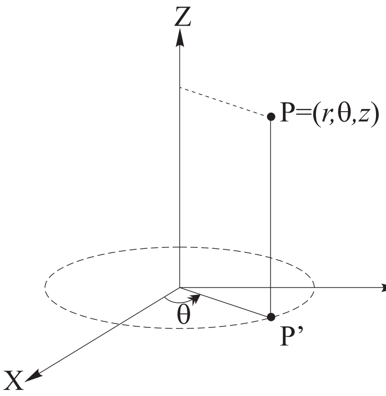


Figura 5.32: El sistema de coordenadas cilíndricas

Si $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ son los vectores unitarios ortogonales que marcan la dirección donde se mide cada una de las correspondientes coordenadas r, θ, z respectivamente en el sistema de coordenadas cilíndricas, (por lo cual $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$), es claro que el vector $\mathbf{e}_z$ es justamente el vector $\mathbf{k} = (0,0,1)$ del sistema rectangular, y que los vectores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$, son $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\mathbf{e}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$. Es decir se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)\\
\mathbf{e}_\theta &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{k} = (0,0,1)
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos\theta\mathbf{e}_r - \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_\theta\\
\mathbf{j} &= \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta\\
\mathbf{k} &= \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.1 *El punto* $\mathbf{P}$ *cuyas coordenadas cartesianas son* $(1,1,1)$. *Las coordenadas cilíndricas de este punto las determinamos convirtiendo a polares las coordenadas* $(1,1,0)$ *de la proyección de* $\mathbf{P}$ *sobre el plano* XY. *Como sabemos* $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. *Así entonces, las coordenadas cilíndricas de* $\mathbf{P}$ *son* $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$. *Nótese que para ver que coordenadas corresponden a* $\mathbf{P}$ *en el sistema ortonormal* $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$, *podemos usar las fórmulas que relacionan a* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *con los vectores* *del sistema ortonormal de la coordenadas cilíndricas, como sigue*

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\\ &= \cos\theta\mathbf{e}_r - \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_\theta + \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z\\ &= (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_r + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

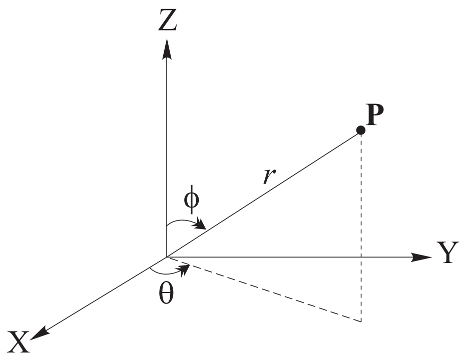
Considerando $\theta = \frac{\pi}{4}$ *se obtiene*

$$(1,1,1) = \sqrt{2}\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z$$

Es decir en el sistema ortonormal $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$*, el punto* $(1,1,1)$ *se vería como* $(\sqrt{2}, 0, 1)$*, tal como la idea geométrica nos dice que debería suceder.*

5.7.2. Sistema de coordenadas esféricas

Este sistema localiza los puntos en el espacio tridimensional con las siguientes tres parámetros: la distancia del punto $\mathbf{P} = (x, y, z)$ al origen de coordenadas, denotada por r, el ángulo que forma la proyección del vector $\mathbf{P}$ en el plano XY, con la parte positiva del eje X, denotado por θ, y el ángulo que forma el vector $\mathbf{P}$ con la parte positiva del eje Z, denotado por ϕ. Se dice entonces que la terna (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas del punto $\mathbf{P}$.



$$0 \le r < +\infty$$
$$0 \le \theta < 2\pi$$
$$0 \le \phi \le 2\pi$$

Figura 5.33: El sistema de coordenadas esféricas

La ecuación $r = r_0$ es, en coordenadas esféricas, la ecuación de una esfera con centro en el origen y radio r_0. En efecto, esta ecuación la satisfacen los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuya distancia al origen es igual a r_0, sin importar sus ángulos θ y ϕ.

La ecuación $\phi = \phi_0$, $(\phi_0 \neq \frac{\pi}{2})$ es, en coordenadas esféricas, la ecuación de un semicono con vértice en el origen, pues en ella se establece la condición de que los puntos $\mathbf{P}$ que la satisfacen forman un ángulo constante igual a ϕ_0 con la parte positiva del eje Z, sin importar el ángulo θ y el valor de r.

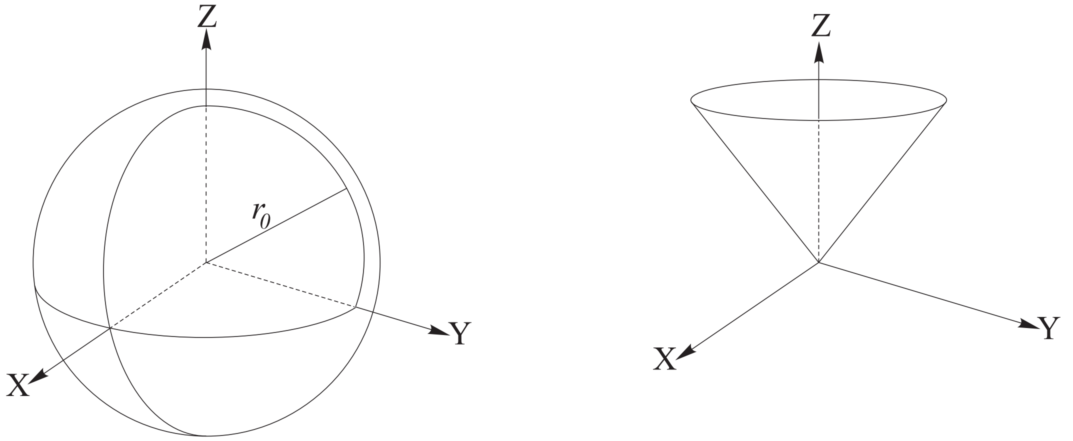
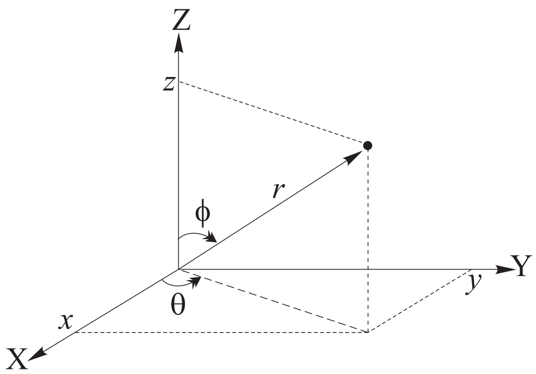


Figura 5.34: La esfera $r = r_0$ y el semicono $\phi = \phi_0$

Veamos la equivalencia entre las coordenadas rectangulares de un punto $\mathbf{P}$ en $\mathbb{R}^3$ y sus coordenadas esféricas. Las fórmulas que relacionan los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del siste-



$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z = r \cos\phi$$

Figura 5.35: Relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas

ma ortonormal en las coordenadas cartesianas, con los vectores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ del sistema ortonormal esférico, para el punto $\mathbf{P} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{e}_r - (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_\theta + (\cos\phi\cos\theta)\mathbf{e}_\phi \\
\mathbf{j} &= (\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_r + (\cos\theta)\mathbf{e}_\theta + (\cos\phi\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_\phi \\
\mathbf{k} &= (\cos\phi)\mathbf{e}_r - (\operatorname{sen}\phi)\mathbf{e}_\phi
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.2 *El punto* $\mathbf{P}$ *en* $\mathbb{R}^3$ *cuyas coordenadas esféricas son* $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ *tiene, en el sistema coordenado rectangular, las coordenadas*

$$\begin{aligned}
x &= r\operatorname{sen}\phi\cos\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
y &= r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \\
z &= r\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Es decir, en el sistema cartesiano el punto $\mathbf{P}$ *se ve como* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Observación: Si $\mathbf{P} = (x, y, z)$, entonces

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
\phi &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right)
\end{aligned}$$

5.7.3. Ejercicios propuestos

1. Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Verifique que le inverso aditivo del vector $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es el vector $\mathbf{y} - \mathbf{x}$. Discuta geométricamente este hecho.

2. Demuestre que dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo de otro.

3. Diga si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o dependientes.

   a) $\{(3, 2, 1), (1, 0, 0), (-4, 5, -2)\}$

   b) $\{(1, 1, 9), (2, 1, 3), (2, 2, 3), (2, -2, -7)\}$

4. Diga si cada uno de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio $\mathbb{R}^3$.

   a) $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

   b) $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$

   c) $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$

5. Verifique que $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es una base del espacio $\mathbb{R}^3$. Escriba el vector (x, y, z) en términos de esta base.

6. Verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz con los vectores

   a) $\mathbf{x} = (2, 1, 1),\ \mathbf{y} = (1, 0, 0)$

   b) $\mathbf{x} = (3, 0, 1),\ \mathbf{y} = (0, 0, 3)$

   c) $\mathbf{x} = (1, 1, 1),\ \mathbf{y} = (2, 2, 2)$

7. Describa los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que son ortogonales al vector $(-2, 1, 4)$. Verifique que éste es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ del tipo

   $$S = \{(x, y, z)/ax + by + cz = 0\}$$

   Más en general, demuestre que todo subespacio S en $\mathbb{R}^3$ como el anterior, es descrito como $S = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3/\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$ para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

8. *a*) Halle el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a (3,1,1)

   b) Halle el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a (3,1,1) y a (6,2,2)

   c) Halle el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a (3,1,1) y a (2,1,5)

   d) Halle el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a (3,1,1), (2,1,5) y a (1,0,0)

9. Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Demuestre que el único vector de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ es el vector $\mathbf{0}$. ¿Ocurre lo mismo si los vectores no son linealmente independientes?

10. Considere el cuadrilátero cuyos vértices son $A = (1, -2, 2), B = (1, 4, 0)$, $C = (-4, 1, 1), D = (-5, -5, 3)$. Demuestre que las diagonales AC y BD son ortogonales.

11. Verifique que los siguientes conjuntos de vectores son conjuntos ortogonales

a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

b) $\{(4,-1,0),(2,3,-5),(-8,7,1)\}$

12. Sea $\mathbf{v}$ el vector de $\mathbb{R}^3$ cuyo punto inicial está en (1,3,7) y cuyo punto final está en (4,5,7). Hallar la proyección del vector (1,2,1) sobre $\mathbf{v}$.

13. Use el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son:

$$A = (1,3,2),\ B = (2,5,3),\ D = (-2,0,0)$$

14. Sea $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y $-\mathbf{x}, -\mathbf{y}$ sus inversos aditivos. Demuestre que

a) $\mathbf{PR}_{\mathbf{y}\to-\mathbf{x}} = \mathbf{PR}_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}$

b) $\mathbf{PR}_{-\mathbf{y}\to-\mathbf{x}} = \mathbf{PR}_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}$

15. Sea $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y c un número real. Demuestre que

$$\mathbf{PR}_{c\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = c\mathbf{PR}_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}}$$

Verifique este resultado con $\mathbf{u} = (2,1,-1), \mathbf{v} = (3,5,1), c = 2$.

16. Calcule la norma de los siguientes vectores

a) (1,2,1)

b) (2,-3,4)

c) (2,0,2)

17. ¿Es la función norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, que a cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ le asocia su norma
$\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$, una función inyectiva?,¿sobreyectiva?

18. Sean a, b y c tres números reales no nulos. Demuestre que los ocho vectores $(\pm a, \pm b, \pm c) \in \mathbb{R}^3$ tienen la misma norma. Interprete geométricamente este hecho.

19. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

(Sugerencia: $\|\mathbf{x}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|$, de donde se obtiene que $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. De la misma manera se obtiene que $\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$)

20. ¿Existen vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| = 3, \|\mathbf{y}\| = 1, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = 5$?, ¿Existen vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| = 3, \|\mathbf{y}\| = 1, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 5$?

21. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^3$, tales que $\|\mathbf{x}\| = 3, \|\mathbf{y}\| = 7$. Calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

22. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| = 4, \|\mathbf{y}\| = 5, \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = 7$. Calcule $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

23. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| = 11, \|\mathbf{y}\| = 23, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 30$. Calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$.

24. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que

    a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| > \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$

    b) $-(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| < \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$

    c) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales si y sólo si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$

25. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Demuestre que los vectores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ son ortogonales. ¿Vale la afirmación recíproca?.

26. Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. Suponiendo que $\|\mathbf{u}\| = 3$ y $\|\mathbf{v}\| = 4$, calcule: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$; $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$; $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

27. Cada pareja de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. Suponga que $\|\mathbf{u}\| = 1, \|\mathbf{v}\| = 2, \|\mathbf{w}\| = 3$, calcule: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$

28. Sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ un conjunto ortogonal de vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el ángulo entre el vector $\mathbf{u}$ y el vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es de $\frac{\pi}{4}$.

29. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

    A este resultado se le conoce como "Ley del Paralelogramo". Justifique este nombre en base a su contenido geométrico.

30. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$. Demuestre que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es de $\frac{\pi}{3}$. ¿Cuál es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$?, ¿y entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$?.

31. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$. Demuestre que el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el mismo que el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$.

32. Sea $\mathbf{u} = (6, -8, -\frac{15}{2})$. Determine el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ sabiendo que es linealmente dependiente con $\mathbf{u}$, que $\|\mathbf{v}\| = 50$, y que él ángulo que forma $\mathbf{v}$ con la parte positiva del eje Z es agudo.

33. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A = (1, 2, 1), B = (3, -1, 7)$, $C = (7, 4, -2)$es isósceles. Determine sus ángulos internos.

34. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$. Se define la *bola abierta*(en $\mathbb{R}^3$) con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio r, denotada por $B(\mathbf{x}_0, r)$, como el conjunto

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

¿Cómo son la bolas abiertas en $\mathbb{R}^3$? Describa la bolas abiertas $B((0, 0, 0), 1)$ y $B((3, 5, 4), 2)$

35. ¿Verdadero o falso? Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$

36. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tres vectores tales que $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

37. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ cuatro vectores tales que $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4$ y $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_4$. Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4, \mathbf{w} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ son linealmente dependientes.

38. Demuestre que si los vectores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ son colineales , entonces los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son colineales. ¿Vale la afirmación recíproca?

39. Suponga que los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ forman entre si un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

40. Suponga que los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ son vectores unitarios que forman entre si un ángulo de $\frac{\pi}{6}$. Calcule $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

41. Suponga que los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ forman entre si una ángulo de $\frac{\pi}{6}$ si $\|\mathbf{u}\| = 6, \|\mathbf{v}\| = 5$, calcule $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

42. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5$, calcule $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

43. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 5$, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

44. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores ortogonales con normas 4 y 2 respectivamente. Calcule $\|(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \times (3\mathbf{u} - \mathbf{v})\|$.

45. Demuestre que para cualquiera de dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se cumple

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

46. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

47. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$. Discuta la posición relativa de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

48. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, demostrar que el plano que pasa por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tiene por vector normal a

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

49. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

50. Demuestre que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, para cualesquiera vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Explique entonces por que la expresión $[\mathbf{uvw}]$ puede ser usada para denotar, sin peligro de confusión al triple producto escalar de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

51. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ sean coplanares (es decir que se encuentra en un mismo plano) es que $[\mathbf{uvw}] = 0$

52. Determine si los vectores dados son coplanares o no. En caso en que lo sean, encuentre la ecuación del plano en que se encuentra

a) $\mathbf{u} = (1, 2, 1), \mathbf{v} = (1, -1, 0), \mathbf{w} = (2, 1, 0)$

b) $\mathbf{u} = (2, 1, 1), \mathbf{v} = (2, 3, 4), \mathbf{w} = (2, -1, -2)$

c) $\mathbf{u} = (1, 1, 2), \mathbf{v} = (3, 1, 1), \mathbf{w} = (1, 3, 8)$

d) $\mathbf{u} = (2, 0, 1), \mathbf{v} = (3, 1, 0),\ \mathbf{w} = (2, 2, 3)$

53. Demuestre que los cuatro puntos dados se encuentran en un mismo plano. Determine la ecuación del plano en que se encuentran.

a) $A = (1, 1, -1), B = (0, 1, 1), C = (1, 0, 1), D = (2, 2, -5)$

b) $A = (-1, 1, 2), B = (2, 2, 0), C = (1, 1, 1,), D = (-1, 3, 1)$

c) $A = (0, 0, 1), B = (2, -4, 3), C = (5, -7, 2), D = (-4, 7 - 2)$

54. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que $|[\mathbf{uvw}]| \leq \|\mathbf{u}\|\mathbf{v}\|\|\|\mathbf{w}\|$

55. Calcular el area del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u} = (3, 2, 5)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 7)$

56. Calcula el area del paralelogramo cuyos vértices son: $A = (1, 1, 1), B = (2, 3, 4)$, $C = (-2, 1, 5), D = (-1, 3, 8)$

57. Calcular el área del triángulo cuyos vertices son $A = (3, 2, 3), B = (1-, 2, 5)$, $C = (0, 2, 7)$.

58. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{u}(2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 9), \mathbf{w} = (3, 2, 2)$

59. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vertices son el origen de coordenadas y los puntos $A = (2, 1, 1), B = (-3, 7, 9), C(-1, -5, -0)$

60. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vertices son los puntos $A = (2, 1, 2)$, $B = (5, 3, 7), C = (-3, 4, 9), D = (10, 9, 11)$

61. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $\mathbf{P}$ y tiene el vector $\mathbf{n}$ como vector normal

a) $\mathbf{P} = (0, 0, 0),\ \mathbf{n} = (1, 1, 1)$

b) $\mathbf{P} = (2, 1, 1),\ \mathbf{n} = (1, 0, 0)$

c) $\mathbf{P} = (3, 4, 5),\ \mathbf{n} = (0, 2, 3)$

d) $\mathbf{P} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{n} = (3, 2, 6)$

e) $\mathbf{P} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{n} = (-2, -7, 4)$

62. Considere el punto $\mathbf{P} = (1, -1, 3), \mathbf{Q} = (3, 2, 1)$. Hallar la ecuación del plano:

    a) Que pasa por $\mathbf{P}$ y tiene $\mathbf{n} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ por vector normal.

    b) Que pasa por $\mathbf{Q}$ y tiene a $\mathbf{n} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ por vector normal.

63. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $\mathbf{P} = (5, 1, 1)$, si se sabe que los vectores $\mathbf{u} = (2, 1, 2), \mathbf{v} = (-4, -5, 7)$ son paralelas a él.

64. Hallar la ecuación del plano que pasa por los dos puntos $\mathbf{P} = (1, 1, 0), \mathbf{Q} = (3, 2, 4)$, si se sabe que $\mathbf{u} = (7, -1, -3)$ es paralelo a él.

65. Determine si los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ pertenecen plano dado:

    a) $3x - y + z = 1$, $\mathbf{P} = (0, 0, 1), \mathbf{Q} = (1, 1, -1)$

    b) $z = 3$, $\mathbf{P} = (3, 1, 3), \mathbf{Q} = (3, 3, 5)$

    c) $3x - 2y = 0$, $\mathbf{P} = (2, 1, 1), \mathbf{Q} = (-3, 2, 5)$

66. Determine un punto que pasa por el plano dado y un vector normal a él

    a) $3x + z = 3$

    b) $x - y - z = 5$

67. Determine si los planos dados son paralelos, perpendiculares, o si no están en ninguno de estos dos casos

    a) $3x + y - z = 3$, $z - y = 8$

    b) $y = 3$, $y = 7$

    c) $x - y + z = 1$, $x - y + z = 9$

68. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano $4x - y + z = 9$.

69. Determine la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados.

    a) $\mathbf{P} = (2, 1, 0), \mathbf{Q} = (0, 0, 7), \mathbf{R} = (2, 1, 1)$

b) $\mathbf{P} = (1, 4, 9), \mathbf{Q} = (-3, 1, 5), \mathbf{R} = (4, 4, 11)$

70. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por el punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z_0)$ tal que los vectores $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1), \mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ (no colineales) son paralelos a él, se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

71. Considere el plano que pasa por el origen $Ax+By+Cz = 0$, y sea $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z_0)$ un punto que no pertenece al plano. Demuestre que la distancia del punto $\mathbf{P}$ al plano es:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

72. Calcule la distancia del punto $\mathbf{P}$ al plano dado

    a) $\mathbf{P} = (5, 30, 426),\ x = 3$

    b) $\mathbf{P} = (1, 1, 5),\ 2x + 3y - 2z = 4$

73. Suponga que los planos $A_1x + B_1y + C_1z = D_1,\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ son paralelos. Obtenga una fórmula para calcular la distancia entre ellos.

74. Dos caras de un cubo se encuentran los planos $3x - y + 2z = 5$, $3x - y + 2z = 7$, calcule el volumen de cubo.

75. Demuestre que los planos paralelos al plano $Ax + By + Cz = D$ que distan de éste r unidades, son $Ax + By + Cz = D \pm r\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

76. Suponga que los planos perpendiculares $x + y - 2z = 2,\ 2x + z = 5$ dividen a un cubo de volumen 64 en cuatro paralelepípedos. Si el centro del cubo se encuentra en el punto (2,2,1), determine las ecuaciones de los planos en donde se encuentren las caras del cubo.

77. Los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 1),\ \mathbf{v} = (-3, 1, 1),\ \mathbf{w} = (1, -4, 7)$ determinan tres de las aristas de un paralelepípedo. Halle las ecuaciones de los planos en que se encuentran sus caras.

78. Hallar un punto en el eje Y que equidiste de los planos $2x + 2y + z = 0$, $4x - 3y = 2$

79. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $\mathbf{P}$ dado y tiene al vector $\mathbf{v}$ como vector paralelo

    a) $\mathbf{P} = (0, 0, 0),\ \mathbf{v} = (1, 1, 1)$

    b) $\mathbf{P} = (2, -4, -7),\ \mathbf{v} = (3, 1, 2)$

80. Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados:

    a) $\mathbf{P} = (3, 9, 7),\ \mathbf{Q} = (-1, 2, 5)$

    b) $\mathbf{P} = (0, 0, 0),\ \mathbf{Q} = (2, 6, 5)$

81. Determine si los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se encuentran en la recta dada

    a) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}; \qquad \mathbf{P} = (2, 0, 0),\ \mathbf{Q} = (3, 1, 1)$

    b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}; \qquad \mathbf{P} = (5, -4, 1),\ \mathbf{Q} = (-1, 5, 0)$

82. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $\mathbf{P} = (2, 1, 4)$ y que es paralela a la recta $x = 3t,\ y = -2 + 4t,\ z = -t$.

83. Los puntos $A = (2, 1, 3), B = (-2, 7, 5), C = (2, 3, 2)$ son los vértices de un triángulo. Hallar las ecuaciones de las rectas donde se encuentran las medianas de este triángulo. Constate que estas tres rectas se cruzan en un punto.

84. Hallar el punto de intersección de la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$, con el plano $2x + y - z = 1$

85. Compruebe que la recta $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ se encuentra contenida tanto en el plano $5x + y + z = 0$ como en el plano $2x + 3y - 2z = -5$.

86. Determine las ecuaciones paramétricas de las rectas que resultan de la intersección de los planos dados

a) $3x + y - 4z = 0,\ 5x + z = 2$

b) $x = 0,\ y = 0$

87. El punto $\mathbf{P} = (2, 1, -1)$ se encuentra en el plano $x - y + z = 0$. Determine la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $\mathbf{P}$ y que se encuentran sobre el plano dado.

88. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de la recta $x = 3 - 2t,\ y = z = t$, con los planos paralelos $2x + y + z = 3,\ 2x + y + z = 9$. ¿Es ésta la distancia entre los dos planos paralelos dados?

89. Compruebe que las rectas dadas son paralelas

$$a)\ \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = -10t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 5t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -x - 3y + z = 6 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

90. Verifique que las rectas dadas son perpendiculares

$$a)\ \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x - y - z = 7 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$$

91. Demuestre que la distancia d entre el punto $\mathbf{P} = (x_1, y_1, z_1)$y la recta $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ esta dado por

$$d = \frac{\|(a, b, c) \times (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\|}{\|(a, b, c)\|}$$

92. Hallar la intersección, si existe, de los siguiente pares de rectas:

$$a)\ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -6 + 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x = 2 + t \\ Y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

93. Encontrar la intersección de la recta y el plano en cada uno de los siguientes casos

    $$a)\ \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} , \quad \mathbf{P} = (2,3,4) + t(1,0,-2) + s(2,2,2)$$

    b) La recta pasa por (0,0,0) y (-1,3,4) y el plano pasa por (2,3,1), (1,1,-4) y (-3,4,3)

    c) La recta pasa por (0,-1,-1) y (4,2,-1) y el plano pasa por (1,3,2), (-4,1,1) y (2,4,-3)

94. Hallar los cosenos de los ángulos entre una recta paralela al vector (3,4,2) y los ejes coordenados.

95. Si α, β, γ son los ángulos directores de una recta, demostrar que se cumple lo siguiente: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

96. Hallar las rectas siguientes:

    a) Que pasa por el origen con ángulos directores $\alpha = 60°, \beta = 45°$

    b) Que pasa por (-2,1,3) con ángulos directores $\alpha = \beta = 45°$

    c) Que pasa por (3,4,6) con ángulos directores $\alpha = \beta = \gamma$

97. Sean $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ los ángulos directores de las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ respectivamente. Si los ángulos directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ están determinados por los vectores **A** y **B** respectivamente y θ es el ángulo entre **A** y **B**. Demuestre que $\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$

98. Demuestre que $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ son colineales si y sólo si $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) = \mathbf{0}$

99. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por (1,2,1) y (3,-2,1). Sea $\mathcal{L}_2$ la recta que pasa por (2,3,2) y es paralela a (1,2,1). Determinar la recta $\mathcal{L}$ que pasa por (2,0,-3) y es ortogonal tanto a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$.

100. Determinar una normal a cada uno de los siguientes planos

   a) $\mathcal{P} : x = 2 - 3t + s, y = 8t + 7s, z = -5 + 3s$

   b) $\mathcal{P} = \{(5, t, s - t)/s, t \in \mathbb{R}\}$

   c) $\mathcal{P} = \{(5 - t + 3s, 2 + 2t + 3s, -1 + t - s)/t, s \in \mathbb{R}\}$

101. Sean $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ pertenecen a $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0$, $\mathbf{C} = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_0$. Demuestre que $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ son coplanares si y sólo si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$

102. Hallar la intersección de los planos

   a) $2x + 7y - 8z = 0,\ y + z = 0$

   b) $12x - 5y + 7 = 0,\ 9x + 5y - 3z = 4$

   c) $x - y + z = 1,\ x + y + z = 0,\ x - 9y - z = 2$

103. Hallar el ángulo entre el plano que pasa por (0,0,0), (0,1,0)y (0,0,2) y el plano cuya ecuación es $3x - 5y + 2z = 8$

104. Hallar la intersección de la recta que pasa por (2,1,4) y es paralela a (1,1,1); y el plano $\mathcal{P} : (2, -1, 4) + t(1, 7, 3) + s(-3, 8, 0)$

105. Determinar el punto de intersección donde la recta que pasa por (1,3,1) y es ortogonal al plano $6x - 4y + 10z = 30$

106. Demostrar que los planos $\mathcal{P}_1 : (3, 1, 4) + t(1, 7, 3) + s(-3, 8, 0);\ t, s \in \mathbb{R}$; $\mathcal{P}_2 : (2, 4, 6) + t(8, -2, 6) + s(9, 5, 9),\ t, s \in \mathbb{R}$; son paralelos y hallar la distancia entre los planos.

107. Sea $\mathcal{L}$ la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $3x - y - 4z = 5$, $2x - 3y - z = 4$. Si $\mathcal{P}$ es el plano cuya ecuación es $x + 2y + 3z = 1$, encontrar $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}$

108. Encontrar una ecuación del plano que contiene al punto (2,3,6) y a la recta $\mathcal{L} = \{(1, -1, 4) + t(1, 2, -1)/t \in \mathbb{R}\}$

109. Determinar el ángulo diedro entre los planos $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + 5z = 3$ y $\mathcal{P}_2 : 6x - y + z = 7$

110. Dada la recta $\mathcal{L} = \{(-5, 0, 10) + t(3, 2, -3)\}$ y el punto $\mathbf{Q} = (5, 4, 8)$. encontrar dos puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{L}$ que formen con $\mathbf{Q}$ un triángulo isosceles de area $24\sqrt{11}$

111. Demostrar que la ecuación que corta a los ejes coordenados en los puntos $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ donde a, b, c diferente de cero es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

112. Demostrar que los tres planos $y = z + 1, z = x + 1, x = y + 1$, interceptan al plano $x + y + z = 0$ en tres rectas que son los lados de un triángulo equilátero

113. Si $\mathcal{L}_1$ es la recta cuya ecuación es $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ y $\mathcal{L}_2$ es la recta que pasa por (5,4,2) y corta a $\mathcal{L}_1$ en ángulo recto, hallar la ecuación de $\mathcal{L}_2$ y las coordenadas de $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

114. Hallar el ángulo entre la recta $x = y, z = 0$ y el plano con ecuación $x + z = 0$

115. Dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ pasan por el origen. El plano $\mathcal{P}_1$ contiene a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{2}$ y el plano $\mathcal{P}_2$ contiene a la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$, $2x - y + 3z = 2$. Hallar el coseno del ángulo entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$

116. Hallar los pies de la perpendicular común de las dos rectas: $x = \dfrac{y+1}{2} = z$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$

117. Una recta $\mathcal{L}$ es la intersección de los planos $x + y + z = 1$, $x - 2y + 3z = 2$. Hallar la ecuación del plano que contiene a $\mathcal{L}$ y que pasa por (0,0,0)

118. Hallar la ecuación perpendicular común a las rectas: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$ $\dfrac{x+5}{1} = -y = \dfrac{z}{2}$, y pruebe que la distancia mínima entre ellas es $\sqrt{3}$

119. Demostrar que existen dos planos que pasan por la recta $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+3}{3}$ y que forman un ángulo de diedro de $60°$ con el plano $y = z$. Hallar sus ecuaciones.

120. Determinar las coordenadas cilíndricas de los siguientes puntos dados en el sistema cartesiano: $\mathbf{P} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{Q} = (-1, 3, 5)$,$\mathbf{R} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{K} = (2, 3, -1)$

121. Determine las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos dados en el sistema de coordenadas cilíndricas: $\mathbf{P} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{Q} = (1, \pi, 3)$, $\mathbf{R} = (3, \dfrac{5\pi}{3}, -2)$, $\mathbf{K} = (16, \frac{\pi}{4}, 0)$

122. Escriba la ecuación del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en coordenadas cilíndricas.

123. Escriba la ecuación de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en coordenadas cilíndricas.

124. Escriba la ecuación de los paraboloides $z = x^2+y^2$, $z = 2x^2+3y^2$ en coordenadas cilíndricas.

125. Determine las coordenadas esféricas de los siguientes puntos dados en el sistema coordenado cartesiano $\mathbf{P} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{Q} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{R} = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{K} = (-2, -3, -5)$

126. Determine las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos dados en el sistema de coordenadas esféricas $\mathbf{P} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{Q} = (2, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, $\mathbf{R} = (1, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4})$ y $\mathbf{K} = (4, \dfrac{7\pi}{4}, \arccos\left(\dfrac{1}{4}\right))$

127. Escriba la ecuación del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 9$ en coordenadas esféricas

128. Escriba la ecuación de la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ en coordenadas esféricas.

129. Escriba la ecuación de las esferas: $(x-a)^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+(y-a)^2+z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ en coordenadas esféricas.

130. Escriba la ecuación del cono $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ en coordenadas esféricas

131. Sean $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ dos puntos de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en el sistema cilíndrico son (r_1, θ_1, z_1), y (r_2, θ_2, z_2), respectivamente. Demuestre que la distancia d entres estos dos puntos es
$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + (z_2 - z_1)^2}$$

132. Sean $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ dos puntos en $\mathbb{R}^3$, cuyas coordenadas en el sistema esféricos son (r_1, ϕ_1, θ_1) y (r_2, ϕ_2, θ_2), respectivamente. Demuestre que la distancia d entre estos dos puntos es
$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2[\operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos\phi_1\cos\phi_2]}$$

Capítulo 6

Funciones vectoriales de variable real

Pre-Requisitos.- Para la comprensión adecuada de este capitulo de funciones vectoriales de variable real se requiere del conocimiento previo de:

- Cálculo de funciones de una variable real.
- Geometría Analítica.
- Regla básica de diferenciación e integración para funciones de una variable real.

Objetivos.-

- Estudiaremos funciones del tipo $\mathbf{f} : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definidas en algún subconjunto I de $\mathbb{R}$ (digamos un intervalo) y tomando valores en el espacio $\mathbb{R}^n$. en realidad, concentraremos nuestro estudio en el caso $n = 2$ y $n = 3$, ya que es en estos casos donde se cristaliza la riqueza geométrica
- Establecer los fundamentos necesarios para el trazado de los caminos en el espacio $\mathbb{R}^3$, respecto a un sistema de coordenadas
- Estudiar relacionado al parentesco existente entre los diversos caminos que describen una misma curva. Tal parentesco se llama "reparametrización".

6.1. Funciones vectoriales de variable real (curvas en el espacio)

En este trabajo estudiaremos funciones del tipo $\mathbf{f} : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definidas en algún subconjunto I de $\mathbb{R}$ (digamos un intervalo) y tomando valores en el espacio $\mathbb{R}^n$. en realidad, concentraremos nuestro estudio en el caso $n = 2$ y $n = 3$, ya que es en estos casos donde se cristaliza la riqueza geométrica del tema con visualizaciones concretas de los tópicos que se abordarán. Por su puesto que, entendiendo estos casos particulares, se llega a las generalizaciones correspondientes de un modo muy natural.

6.1.1. Función vectorial de variable real

Una función vectorial (de valores vectoriales) de una variable real, es una función del tipo, $\mathbf{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la cual, a cada número real t de algún subconjunto I de $\mathbb{R}$ (el dominio de la función) le asocia un (y solamente un) valor $\mathbf{f}(t)$ en el espacio $\mathbb{R}^n$. Puesto que $\mathbf{f}(t)$ es un punto del espacio $\mathbb{R}^n$, éste tiene n coordenadas, las cuales son, en general, funciones de la variable t. Así, podemos escribir

$$\mathbf{f}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

donde $x_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$ son funciones reales de la variable real t, llamadas funciones coordenadas de la función $\mathbf{f}$, [5], [3].

Como de costumbre, cuando solamente se proporciona la regla de correspondencia (como suele ocurrir) $\mathbf{f}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ y no se hace explícito el dominio I de la función, se entiende que éste es el mayor subconjunto de la recta para el cual $x_i(t)$ tiene sentido para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ (el dominio natural de la función $\mathbf{f}$), es decir, el mayor subconjunto I de $\mathbb{R}$ para el cual $\mathbf{f}(t)$ tiene sentido.

Ejemplo 6.1.1 .

Determinemos el dominio I de la función siguiente

$$\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{f}(t) = (t, 1)$$

- $x_1(t) = t,\ Dom(x_1) = \mathbb{R}$
- $x_2(t) = 1,\ Dom(x_2) = \mathbb{R}$

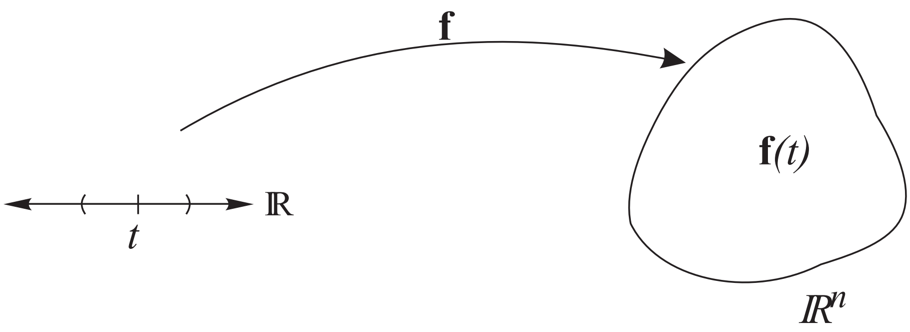


Figura 6.1: Una función $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

- $Dom(\mathbf{f}) = Dom(x_1) \cap Dom(x_2) = \mathbb{R}$

Ejemplo 6.1.2 .

Determinemos el dominio I de la función siguiente

$$\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathbf{f}(t) = (\sqrt{1+t}, \sqrt{1-t}, t)$$

- $x_1(t) = \sqrt{1+t},\ Dom(x_1) = [-1 + \infty >$
- $x_2(t) = \sqrt{1-t},\ Dom(x_2) =< -\infty, 1]$
- $x_3(t) = t,\ Dom(x_3) = \mathbb{R}$
- $Dom(\mathbf{f}) = I = Dom(x_1) \cap Dom(x_2) \cap Dom(x_3) = [-1, 1]$

6.1.2. Límites

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y sea t_0 un punto de I o un punto frontera de I. Se dice que el límite de la función $\mathbf{f}$ cuando t tiende a t_0 es $L \in \mathbb{R}^n$, lo cual se escribe como

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = L$$

Si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$t \in I,\ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(t) - L\| < \varepsilon$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma euclidiana de vectores de $\mathbb{R}^n$, esdecir $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, [1], [5], [17].

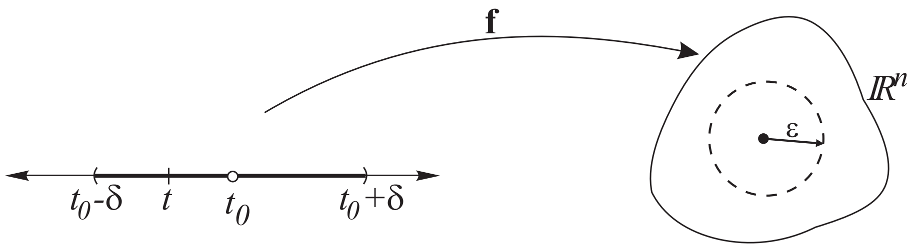


Figura 6.2: El límite de una función $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Teorema 6.1.1 *Sea $\mathbf{f} : I \subseteq I\!R \to I\!R^n$ una función definida en el intervalo I de $I\!R$ y sea t_0 un punto de I o un punto frontera de I. Entonces $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = L = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in I\!R^n$ si y sólo si $\lim\limits_{t\to t_0} x_i(t) = l_i$, donde $\mathbf{f}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$*

Ejemplo 6.1.3 *Calculemos el siguiente límite* $\lim\limits_{t\to 0} = \left(\dfrac{1-\cos t}{t^2}, \dfrac{1-\cos 2t}{t^2}\right)$

- $x_1(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}, \quad x_2(t) = \dfrac{1-\cos 2t}{t^2}$
- $\lim\limits_{t\to 0} x_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+\cos t)}{t^2}\dfrac{(1+\cos t)}{(1+\cos t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos^2 t}{t^2(1+\cos t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2(1+\cos t)} = \dfrac{1}{2}$

  $$\lim_{t\to 0)} x_2(t) = \lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{t^2(1+\cos 2t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{t^2(1+\cos 2t)} = \lim_{t\to 0} \frac{4\operatorname{sen}^2 2t}{(2t)^2(1+\cos 2t)}$$

  $$= \lim_{t\to 0} \frac{4\operatorname{sen}^2 2t}{(2t)^2(1+\cos 2t)} = 2$$

  $$\Rightarrow \lim_{t\to 0}(x_1(t), x_2(t)) = \left(\lim_{t\to 0} x_1(t), \lim_{t\to 0} x_2(t)\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

6.1.3. Continuidad

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el subconjunto abierto I de $\mathbb{R}$ y sea $t_0 \in I$. Se dice que $\mathbf{f}$ es continua en t_0 si

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$$

Como siempre, lo que sugiere esta definición es que la propiedad de continuidad de una función $\mathbf{f}$ equivale a que movimientos pequeños de t entorno a t_0 producen movimientos pequeños en las imágenes $\mathbf{f}(t)$ al rededor de $\mathbf{f}(t_0)$; de otro modo, las imágenes cercanas a $\mathbf{f}(t_0)$ no tienen cambios bruscos para cambios pequeños del valor de t, [1], [5], [3].

Teorema 6.1.2 *Sea* $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *una función definida en el intervalo abierto* I *de* $\mathbb{R}$*, digamos que* $\mathbf{f}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$*. Sea* $t_0 \in I$*, la función* $\mathbf{f}$ *es continua en* t_0 *si y sólo si sus funciones coordenadas* $x_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lo son.*

Una función $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice ser continua en I (o simplemente continua) si lo es en todo $t \in I$.

Ejemplo 6.1.4 *La función* $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\mathbf{f}(t^3 + t^2 - 1, t^4 - 4t^3 + 1)$$

es continua, puesto que sus funciones coordenadas son funciones polinómicas

Ejemplo 6.1.5 *La función* $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} (2t, t^3, \dfrac{e^t - 1}{t}) & , \ t \neq 0 \\ (0, 0, 0) & , \ t = 0 \end{cases}$$

es discontinua en $t = 0$*, pues*

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \to 0} \left(2t, t^3, \frac{e^t - 1}{t} \right) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0) = \mathbf{f}(0)$$

La continuidad de una función $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida en el intervalo I de $\mathbb{R}$ es el ingrediente esencial que nos permite definir el tipo de objetos de nuestro estudio.

6.1.4. Ejercicios propuestas

1. Determine el dominio I de las funciones siguientes:

   a) $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (\sqrt{t}, t^2)$

   b) $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \ln t \right)$

   c) $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (\ln(t^2 + t + 1), \ln(t^2 - t + 1), \ln(t^2 + 1))$

   d) $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (t, \operatorname{arc\,sen} t, \ln t)$

2. Calcule los límites indicados:

   a) $\lim\limits_{t\to 1}(3t-1,t)$

   b) $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{t^2-1}{t-1},\dfrac{t^2-1}{t+1}\right)$

   c) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t},\dfrac{t}{\cos t}\right)$

   d) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1-\cos t}{t^2},\dfrac{1-\cos 2t}{t^2}\right)$

   e) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t},\dfrac{\cos 2t}{\cos 3t},\dfrac{\operatorname{sen} 4t}{\cos 5t}\right)$

3. Exponga la continuidad de las funciones

   a) $\mathbf{f}(t)=\left(\dfrac{t^2-1}{t-1},\dfrac{t^2-1}{t+1}\right)$

   b) $\mathbf{f}(t)=(t, sgn\ t)$

   c) $\mathbf{f}(t)=\begin{cases}\left(t,\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right) & ,\ \text{si } t\neq 0\\ (0,1) & ,\ \text{si } t=0\end{cases}$

   d) $\mathbf{f}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t},\dfrac{\cos 2t}{\cos 3t},\dfrac{\operatorname{sen} 4t}{\cos 5t}\right) & ,\ \text{si } t\neq 0\\ \left(\dfrac{2}{3},1,0\right) & ,\ \text{si } t=0\end{cases}$

4. Suponga que la función $\mathbf{f}: I\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ es continua en I. Demuestre que la función $\varphi: I\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\|\mathbf{f}(t)\|$ es continua en I.

6.2. Caminos en $\mathbb{R}^n$

Una función $\mathbf{f}: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ continua, definida en el intervalo I de $\mathbb{R}$ se llama camino o trayectoria en el espacio $\mathbb{R}^n$.

Si la función continua $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ está definida en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ diremos que el punto $\mathbf{f}(a) \in \mathbb{R}^n$ es el *punto inicial* del camino o trayectoria $\mathbf{f}$ en tanto que $\mathbf{f}(b) \in \mathbb{R}^n$ es el *punto final* de él. Si acontece que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$, diremos que el camino $\mathbf{f}$ es *cerrado*. Si la función $\mathbf{f}$ es inyectiva en I (es decir, para todo $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{f}(t_1) \neq \mathbf{f}(t_2)$), diremos que $\mathbf{f}$ es un *camino simple*. Si se tiene que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$ y la función $\mathbf{f}$ restringida al intervalo $[a, b >$ es inyectiva, diremos que el camino es *cerrado simple*.

La manera correcta de abordar la geometría de estos objetos matemáticos es por medio de la traza. Se llama *traza* del camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, al conjunto (subconjunto de $\mathbb{R}^n$) de las imágenes de $\mathbf{f}$, es decir

$$\text{Traza de } \mathbf{f} = \{\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n /\ t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

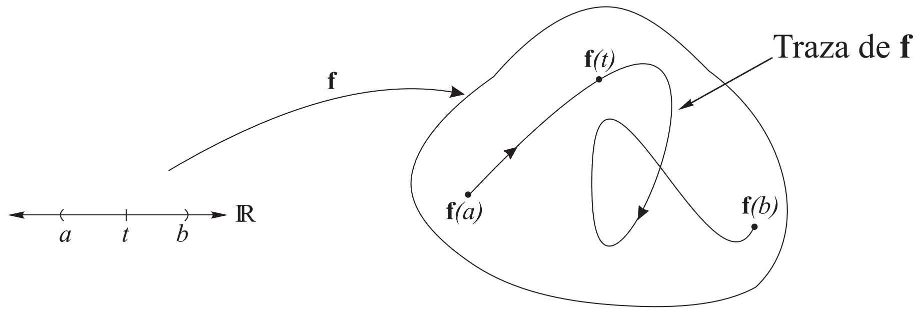


Figura 6.3: Traza de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Así, la traza de un camino $\mathbf{f}$ es algo así como la "huella" de las imágenes de $\mathbf{f}$ (esta huella se deja en el espacio donde viven las imágenes de la función).

Podemos pensar que cada camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es como "la fórmula matemática de una carretera en el espacio", la cual, como veremos, tiene dos ingredientes importantes que la caracterizan: la forma de la carretera en si y la manera como ésta es recorrida.

Designaremos con la palabra *curva* (en $\mathbb{R}^n$) la traza de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Esta palabra tiene un contenido geométrico mas fuerte que "camino" o "trayectoria", lo cual resulta muy conveniente para nuestros propósitos, pues en ocasiones debemos distinguir al camino en si, el cual es *una función* continua $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, del aspecto visual que presentan sus imágenes en conjunto, es decir de la curva asociada a $\mathbf{f}$.

Ejemplo 6.2.1 *Consideremos la función continua $\varphi : I \to I\!R$. Esta es una función real de variable real $x \in I$. Como sabemos, la gráfica de esta función es (por definición el conjunto)*

$$\{(x, y)/\ x \in I,\ y = \varphi(x)\} \subset I\!R^2$$

al cual siempre nos hemos referido como una "curva" en el plano. ¿Es ésta una "curva" en el sentido que estamos manejando?, es decir, ¿es la gráfica de la función $y = \varphi(x)$ igual a la traza de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?. Nótese que si definimos la función $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (I es el mismo intervalo de la recta donde está definida φ) como

$$\mathbf{f}(t) = (t, \varphi(t))$$

tenemos que $\mathbf{f}$ es continua (pues sus funciones coordenadas $x(t) = t, y(t) = \varphi(t)$ lo son) y además

$$\text{Traza de } \mathbf{f} = \{(t, \varphi(t))/\ t \in I\} = \text{gráfica de } \varphi$$

De este modo tenemos pues que las curvas que son gráficas de funciones continuas

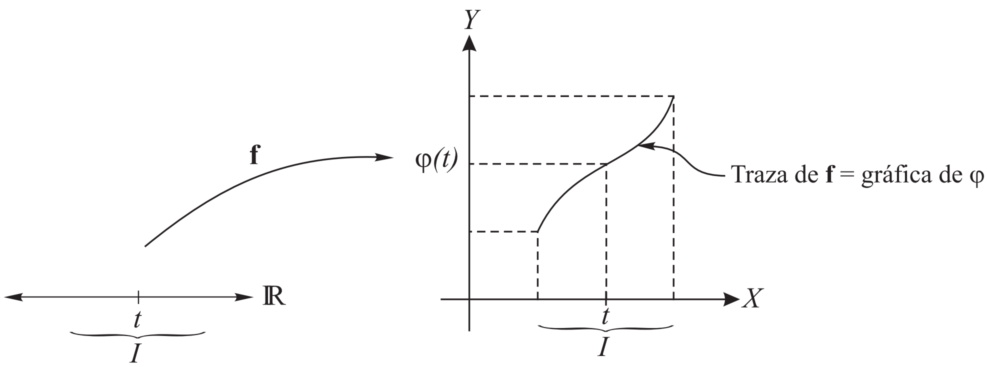


Figura 6.4: Gráfica de la función φ

$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son trazas de caminos $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (t, \varphi(t))$.

Ejemplo 6.2.2 *Determinemos la traza del camino $\mathbf{f}(t) = (t, mt + b)$.*

- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

- Traza de $\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\text{Traza de } \mathbf{f} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x(t) = t, \ y(t) = mt + b\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = mt + b \end{array} \right. \Rightarrow y = mx + b : \quad \text{recta}$$

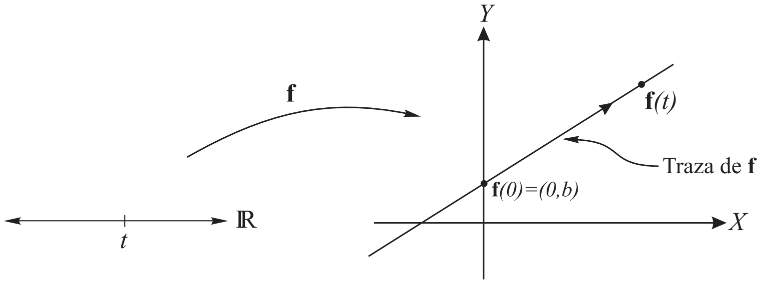


Figura 6.5: Traza de un camino $\mathbf{f}(t) = (t, mt + b)$

Ejemplo 6.2.3 *Determinemos la traza del camino* $\mathbf{f}(t) = (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$

- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Traza de $\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^3$
- Traza de $\mathbf{f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = at + x_0, \ y = bt + y_0, \ z = ct + z_0\}$

$$(x,y,z) \quad = \quad (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c) : \quad \text{Recta}$$

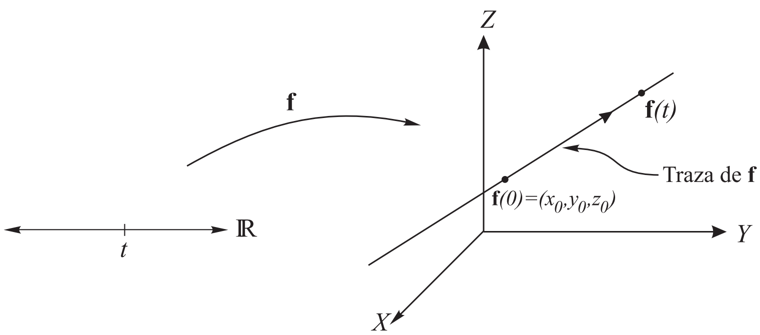


Figura 6.6: Una recta en $\mathbb{R}^3$, traza del camino $\mathbf{f}(t) = (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$

Ejemplo 6.2.4 *Determinemos la traza del camino* $\mathbf{f}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$

- $\mathbf{f}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$
- Traza de $\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^2$
  Traza de $\mathbf{f} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t\}$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t \\ y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 : \quad \text{circunferencia}$$

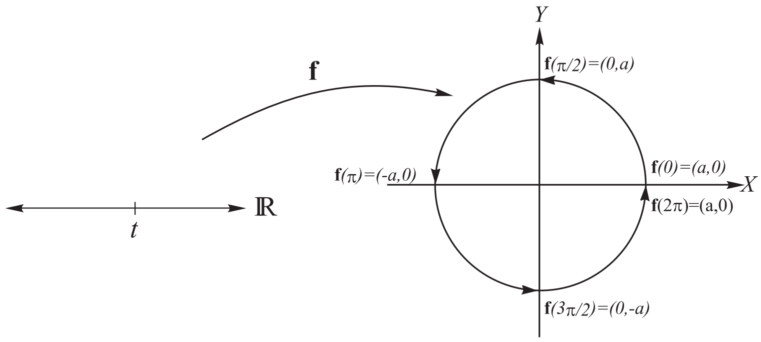


Figura 6.7: La traza del camino cerrado simple $\mathbf{f}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$

Ejemplo 6.2.5 *Determinemos la traza del camino* $\mathbf{f}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, t)$*.*

- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Traza de $\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\text{Traza de } \mathbf{f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ z = t\}$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 : \quad \text{cilíndro cirucular recto}$$

La curva correspondiente debe estar dibujada en el cilindro recto $x^2 + y^2 = a^2$. Por otra parte, a medida que t avanza, la tercera función coordenada de $\mathbf{f}$, $z(t) = t$, que marca la altura del punto $\mathbf{f}(t)$, va siendo cada vez mas grande.

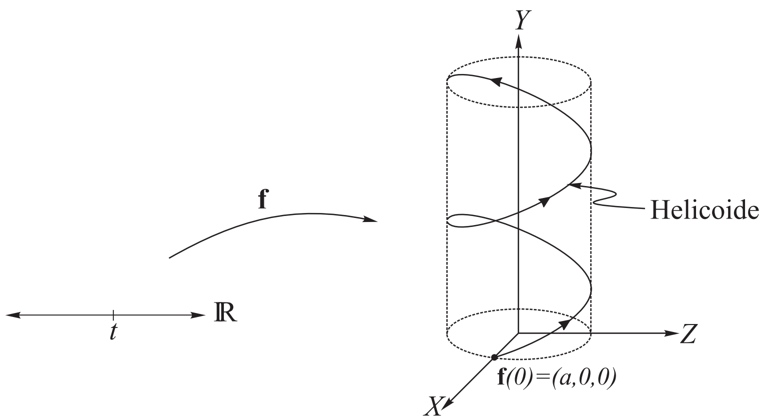


Figura 6.8: Una hélice

6.2.1. Ejercicios propuestas

1. Describa la traza del camino constante $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (a, b)$

2. Demuestre que todo camino del tipo $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (at + b, ct + d)$, donde a y c son reales no nulos ,es simple. Describa su traza

3. Demuestre que el camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (t^2 + 1, t^2 - 1)$ no es simple. Describa la traza de $\mathbf{f}$.

4. Demuestre que el camino $\mathbf{f} : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (t^2 - 1, t^3 + 2t^2 - t - 2)$ no es simple. ¿Es cerrado?, ¿Es cerrado simple?

5. Considere el camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ describa la traza de $\mathbf{f}$

6. Describa la traza del camino $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ en cada uno de los casos:

    a) $a = b$

    b) $a \neq b$

7. Considere el camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (t\varphi(t), a)$, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Describa la traza de $\mathbf{f}$

8. Demuestre que el camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (a \cos^2 t, \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 t, \frac{1}{2} c \operatorname{sen}^2 t)$ se encuentra sobre el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

9. Demuestre que el camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (t^2 + t + 1, t^2 - 1, t + 2)$, se encuentra sobre el plano $x - y - z = 0$

6.3. Diferenciabilidad y curvas regulares

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ un camino definido en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}^3$. Sea $t_0 \in I$. Se define la derivada de $\mathbf{f}$ en t_0, denotada por $\mathbf{f}'(t_0)$ o $\frac{d\mathbf{f}}{dt}(t_0)$, como el límite

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h}$$

cuando éste existe. En tal caso se dice que el camino $\mathbf{f}$ es diferenciable en t_0. Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en todos los puntos t_0 de I, decimos que es diferenciable en I.

La derivada de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ en un punto $t_0 \in I$, *es un vector en el espacio* $\mathbb{R}^n$. De hecho, viendo la siguiente cadena de igualdades, en donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\
f'(t_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_1(t_0 + h), \ldots, x_n(t_0 + h) - (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))}{h} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \ldots, \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right) \\
&= (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))
\end{aligned}$$

Un hecho geométrico relevante acerca del vector $\mathbf{f}'(t_0)$ de un camino diferenciable $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es que éste es tangente a la curva correspondiente en el punto donde se calcula la derivada y que apunta en dirección al recorrido de la curva. Siendo $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable al vector $\mathbf{f}'(t)$ se le llama *vector velocidad* del camino en el punto $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Si $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino de clase C^1, y si $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ (el vector $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$) para todo $t \in I$, entonces se dice que el camino es *regular*, [1], [3], [18].

Ejemplo 6.3.1 *Sea* $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *el camino* $\mathbf{f}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$ *Este es un camino diferenciable, pues sus funciones coordenadas* $x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t$*, los son. La derivada de* $\mathbf{f}$ *es*

$$\mathbf{f}\,'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a\cos t)$$

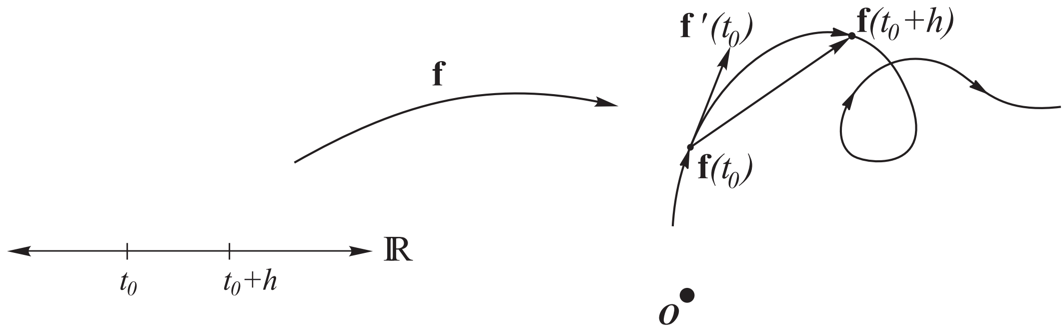


Figura 6.9: El vector tangente $\mathbf{f}'(t_0)$ a la curva en $\mathbf{f}(t_0)$

Nótese que, tomando el producto punto del vector $\mathbf{f}(t)$ con el vector $\mathbf{f}'(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t) &= (a\cos t, a\operatorname{sen} t)\cdot(-a\operatorname{sen} t, a\cos t) \\ &= -a^2\operatorname{sen} t\cos t + a^2\operatorname{sen} t\cos t = 0 \end{aligned}$$

de modo que $\mathbf{f}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{f}(t)$ para todo t

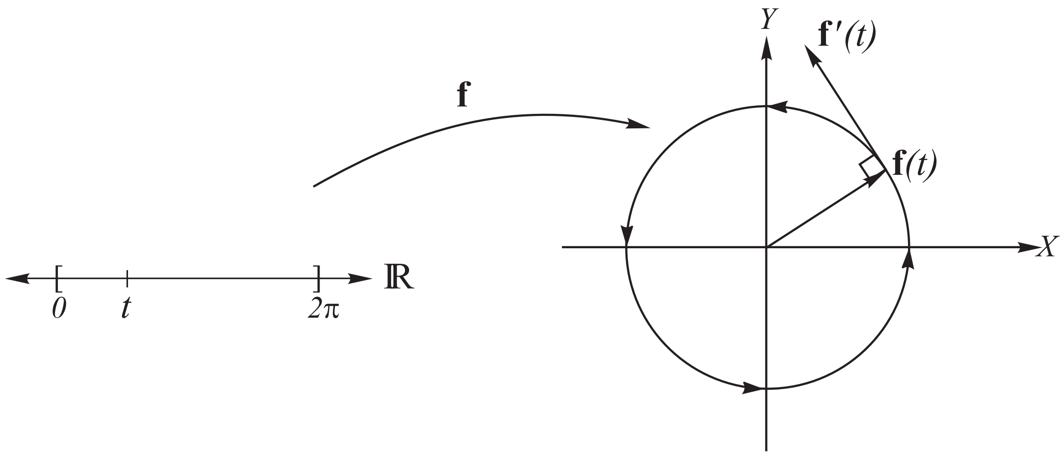


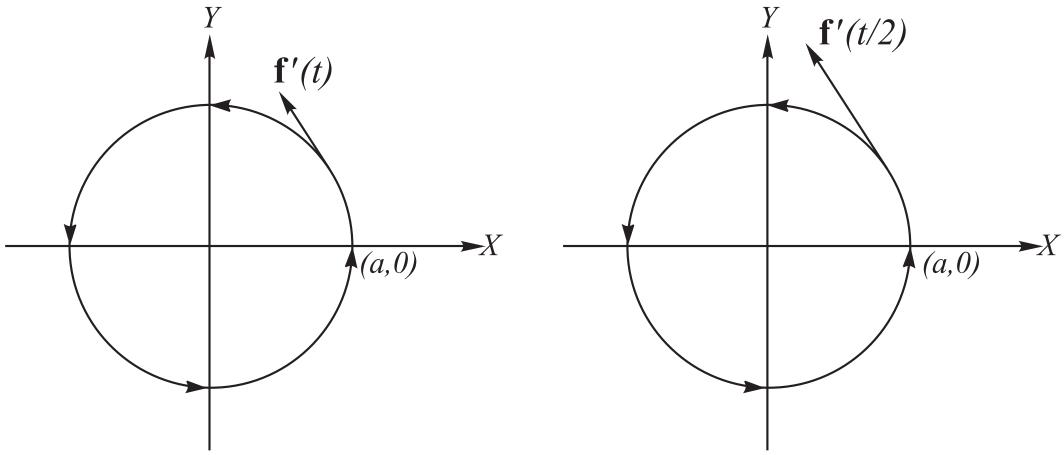
Figura 6.10: El camino $\mathbf{f}(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$ y su vector velocidad $\mathbf{f}'(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t)$

Ejemplo 6.3.2 .

Consideremos el camino $\overline{\mathbf{f}} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\overline{\mathbf{f}}(t) = (a\cos 2t, a\operatorname{sen} 2t)$. La curva descrita por $\overline{\mathbf{f}}$ es el mismo círculo $x^2+y^2=a^2$ descrito por el camino $\mathbf{f}$ del ejemplo anterior. Para este camino $\overline{\mathbf{f}}$ se tiene

$$\overline{\mathbf{f}}(t) = (-2a \operatorname{sen} 2t, 2a \cos 2t)$$

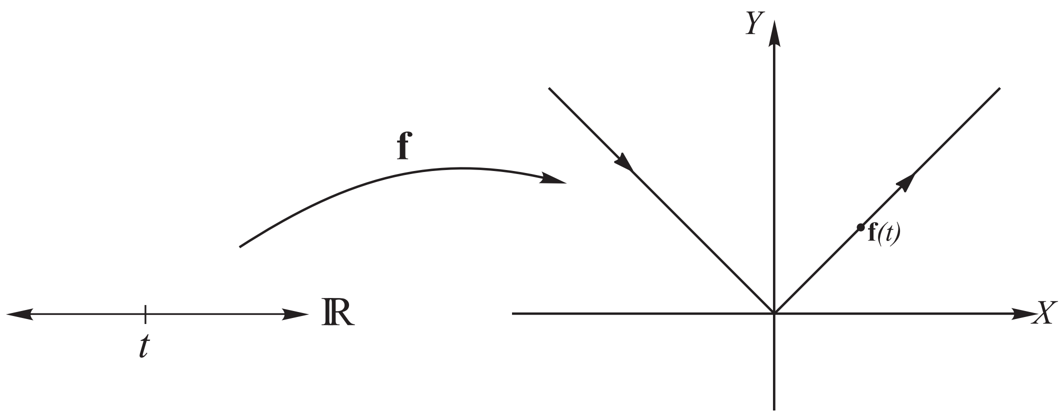
En $t = 0$, ambos caminos se encuentran en el punto inicial $\mathbf{f}(0) = \overline{\mathbf{f}}(0) = (a, 0)$. Sin embargo obsérvese que $\mathbf{f}'(0) = (0, a)$ y $\overline{\mathbf{f}}'(0) = (0, 2a)$, de modo que la velocidad en el arranque de $\overline{\mathbf{f}}$ es el doble del la de $\mathbf{f}$. Esta es una situación que se mantiene durante el recorrido de las curvas correspondientes



De esta manera podemos explicarnos por que el camino $\overline{\mathbf{f}}$ le toma solamente π segundos recorrer el círculo completo, la mitad del tiempo del que toma a $\mathbf{f}$ (2πseg.)

Ejemplo 6.3.3 .

Sea la función $\mathbf{f}(t) = (t, |t|)$. Este es un camino en $\mathbb{R}^2$ pues sus dos funciones coordenadas, no se trata de un camino diferenciable, pues la función $y(t) = |t|$ no es diferenciable en $t = 0$



Obsérvese que es justamente en el valor $t = 0$ en el que se presentan los problemas para el vector velocidad $\mathbf{f}'(t)$ en $\mathbf{f}(0) = (0, 0)$ dicho vector no existe.

Ejemplo 6.3.4 .

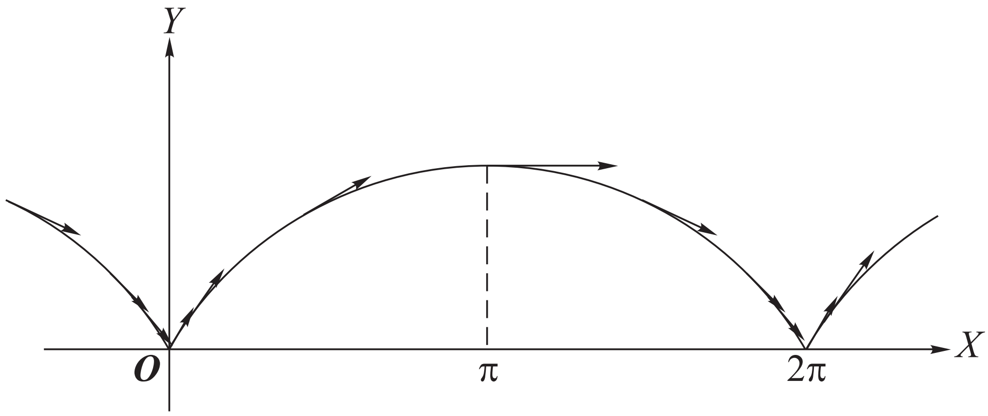
Sea la función $\mathbf{f}(t) = (at - a\,\mathrm{sen}\,t, a - a\cos t)$ (cicloide). No hay duda de que este es un camino de clase C^1, pues las funciones coordenadas $x = a(t - \mathrm{sen}\,t)$, $x = a(1 - \cos t)$ lo son. El vector velocidad de esta curva es

$$\mathbf{f}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (a - a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t)$$

Se ve entonces que por cada múltiplo de 2π (cada vez que el círculo que rueda sobre eje X, cuyo punto es la periferia da origen a la cicloide, da una vuelta completa), se tiene.

$$\mathbf{f}'(2k\pi) = (a - a\cos 2k\pi, a\,\mathrm{sen}\,2k\pi) = (0, 0)$$

así que la cicloide, siendo una curva de clase C^1, no es regular



Observaciones

- Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ un camino regular. Sea $t_0 \in I$. La recta tangente a la curva correspondiente en $\mathbf{f}(t_0)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{f}(t_0)$ y tiene por vector paralelo a $\mathbf{f}'(t_0)$, es decir

$$\mathcal{L}_T : \;\; P = \mathbf{f}(t_0) + r\mathbf{f}'(t_0), \quad r \in \mathbb{R}$$

- Para el camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, el *plano normal*a la curva correspondiente en $\mathbf{f}(t_0)$ es el plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{f}(t_0)$ y tiene ahí por vector normal al vector $\mathbf{f}'(t_0)$, es decir:

$$\mathcal{P}_N : \;\; (P - \mathbf{f}(t_0)) \cdot \mathbf{f}'(t_0) = 0$$

- La propiedad de que una recta dada (en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{R}^2$) sea tangente a una curva, debe ser una propiedad de la curva en sí y no del camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) que tiene por traza dicha curva.

6.3.1. Ejercicios propuestos

1. Hallar la derivada del camino dado en el punto indicado:

   a) $\mathbf{f}(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} t^2)$, para $t = \frac{\pi}{2}$

   b) $\mathbf{f}(t) = (\sqrt{3t+1}, \ln^3(t^2+1))$ para $t = 0$

   c) $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \cos^2 2t, \cos^3 3t)$, para $t = \pi$

2. Diga si el camino es Diferenciable, regular. Justifique su respuesta

   a) $\mathbf{f}(t) = (3t-1, 4t+5)$

   b) $\mathbf{f}(t) = (2t^2+4, 4t^3-2t^2+1)$

   c) $\mathbf{f}(t) = (t, t^5+3t^4-5t^3+9t^2-10t+23)$

   d) $\mathbf{f}(t) = (t, t^{\frac{2}{3}})$

   e) $\mathbf{f}(t) = (t^3, t^2)$

3. ¿Cierto o falso?. $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable tal que $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in I$, entonces la función $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \|\mathbf{f}(t)\|$ es diferenciable y $\|\mathbf{f}'(t)\| = \|\mathbf{f}(t)\|'$ (es decir $\varphi(\mathbf{f}'(t)) = \varphi'(\mathbf{f}(t))$). Si es cierto, demuestrelo. Caso contrario, de un contraejemplo

4. ¿Cierto o falso?. $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable tal que $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in I$, entonces $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = \|\mathbf{f}(t)\| \cdot \|\mathbf{f}'(t)\|$. si es cierto demuestrelo. Caso contrario de un contraejemplo.

5. Sea $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\mathbf{f}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, donde a y b son dos reales positivos. Demuesre que $\mathbf{f}(t) \perp \mathbf{f}'(t), \forall t \in [0, 2\pi]$ si y sólo si $a = b$. Interprete este hecho geométricamente.

6. Hallar el(los) valor(es) de t para los cuales el vector tangente al camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (2t^2+1, 3t-2)$, sea paralelo al vector $\mathbf{V} = (2, -1)$.

7. Considerando el camino regular $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (t, \varphi(t))$, demuestre que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto $x = x_0 \in I$, es

$$y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0)$$

8. Determine la ecuación de la recta tangente y del plano normal a la curva descrita por el camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, en el punto indicado

   a) $\mathbf{f}(t) = (t + 1, 3t - 1, 2t - 5)$, en el punto $P = \mathbf{f}(t_0)$

   b) $\mathbf{f}(t) = (t^3 - 2t, t^2 + 1, 3)$, en el punto $P = \mathbf{f}(1)$

   c) $\mathbf{f}(t) = (e^{-2t}, e^{-t}, t)$, en el punto $P = \mathbf{f}(0)$

   d) $\mathbf{f}(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, 5t)$, en el punto $P = \mathbf{f}(0)$

   e) $\mathbf{f}(t) = (3 \cos t, 1, 2 \operatorname{sen} t)$, en el punto $P = \mathbf{f}(\pi)$

9. Determinar los puntos en que la recta tangente a la curva descrita por el camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ es paralela al plano $3x + y + z = 5$.

10. Hallar el punto en que la recta, imagen del camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (t + 1, 3t - 2, 2t - 1)$, está más cerca del origen.

11. Demuestre que el punto P en que la recta, imagen del camino $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (at + \alpha, bt + \beta, ct + \gamma)$, está más cerca del origen, es $P = \mathbf{f}(t_0)$, donde $t_0 = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a^2 + b^2 + c^2}$

6.4. Reparametrizaciones

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un camino. En varias ocasiones hemos mencionado el hecho de que un camino se puede ver como un objeto matemático caracterizado por dos aspectos: la curva que describe en el espacio $\mathbb{R}^n$ (su traza), que es como la "carretera" por la que circula el punto $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$, y , por otro lado, la manera como el punto $\mathbf{f}(t)$ recorre tal carretera; más aún, la velocidad a la que el punto realiza el recorrido. Uno de los objetivos fundamentales en el estudio de caminos $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es el de las propiedades geométricas de las curvas que éstas representan. Estas propiedades no dependen generalmente de la velocidad a la que se recorre la curva, sino solamente de la curva en si, es decir, de la forma geométrica de la imagen del camino $\mathbf{f}$. Sin embargo, es vía del camino $\mathbf{f}$ que se estudia tales propiedades. De echo, algunos conceptos geométricos importantes en el estudio de la geometría de curvas, se define por medio de un "recorrido con ciertas características" que se hacen en ellas, es decir, por medio de un camino concreto de $\mathbf{f}$ que tenga por imagen la curva en consideración.

En esta guía consideraríamos lo relacionado al parentesco existente entre los diversos caminos que describen una misma curva. Tal parentesco se llama "reparametrización". De manera poco precisa podemos decir que la parametrización de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es otro camino $\bar{\mathbf{f}} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con la misma imagen de $\mathbf{f}$. De otro modo, el camino $\bar{\mathbf{f}}$ es una parametrización del camino $\mathbf{f}$ si la curva descrita por $\bar{\mathbf{f}}$ es la misma que la descrita que por $\mathbf{f}$. Esta no será, sin embargo la definición de reparametrización que aceptamos. Tendremos que avanzar un poco más en la teoría para afinarle algunos detalles desagradables que admite esta idea general, y establecer así la definición de este concepto que nos servirá.

Antes que nada, un comentario para justificar el termino "reparametrización ". Ya se había mencionado que a las funciones coordenadas de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se les solía llamar "ecuaciones paramétricas" de la curva que describe el camino. Con tal terminología, a la variable independiente t se llama "parámetro". En esta perspectiva entonces, la reparametrización de un camino no es mas que un cambio en el parámetro t en las ecuaciones paramétricas de la recta, es decir, un cambio independiente del camino $\mathbf{f}$. Notese que, viendo el parámetro t como el tiempo en que el punto $\mathbf{f}(t)$ recorre la curva, un cambio en la escala del tiempo representará un cambio de velocidad del desplazamiento del punto $\mathbf{f}(t)$ por la curva. De esta manera caemos nuevamente en la cuenta de que siendo $\bar{\mathbf{f}}$ un camino que describe la misma curva que $\mathbf{f}$ (una parametrización de $\mathbf{f}$), la diferencia entre ellos debe estar precisamente en la velocidad del recorrido de la curva.

Tenemos entonces el camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definido en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. La manera de obtener una reparametrización de $\mathbf{f}$ es simplemente dejar correr el tiempo t en el intervalo I de otra manera. Esto lo podemos lograr definiendo un función $\varphi : J \to I$ de la variable s. Mientras la variable real s recorre el intervalo J, la imágenes $\varphi(s)$ recorre el intervalo I; estos serán los valores $t = \varphi(s)$ que tomará $\mathbf{f}$

para asignar los puntos $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$. La primera condición natural que debe cumplir φ es que debe ser sobreyectiva, para asegurar que las imágenes $\varphi(s)$ tomen todos los valores de t en I. Observe entonces que podemos concebir a una reparametrización de $\mathbf{f}$ como una composición de $\mathbf{f}$ con φ. Mas precisamente, dada la función sobreyectiva $\varphi : J \to I$ definida en el intervalo J de $\mathbb{R}$ y tomando valores en el intervalo I de $\mathbb{R}$ podemos componerla con el camino $\mathbf{f} : I \subseteq I \to \mathbb{R}^n$ para formar así la nueva función $\mathbf{f} \circ \varphi : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Siendo $\mathbf{f}$ un camino, esta función es continua. Otra condición natural que surge para la función φ es que sea continua asegurándose así de que la composición $\mathbf{f}\circ\varphi$ sea una función continua (compuesta de funciones continuas es una función continua) y por lo tanto ser un nuevo camino, el cual, es claro, tiene la misma traza que el camino $\mathbf{f}$ (figura 6.11)

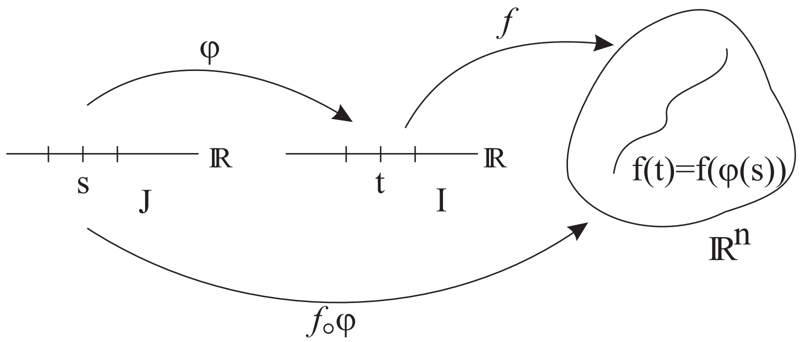


Figura 6.11: Reparametrización del camino $\mathbf{f}$

Si el camino $\mathbf{f}$ es diferenciable (respectivamente de clase C^1), nos gustaría que esta propiedad no se perdiera con la reparametrización $\bar{\mathbf{f}} = f\circ\varphi$, de tal manera también pediremos que la función $t = \varphi(s)$ sea derivable (de clase C^1). En tal caso tenemos la composición $\bar{\mathbf{f}} = f\circ\varphi$ de funciones diferenciables (de clase C^1), la cual es entonces diferenciable (de clase C^1, respectivamente) y según la regla de la cadena

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = (f\circ\varphi)'(s) = f'(\varphi(s))\varphi'(s), s \in J$$

En la fórmula anterior $\varphi'(s)$ es la derivada de la función $\varphi : J \to I$ en el punto $s \in J$; por lo tanto es número real, en tanto que $\mathbf{f}'(\varphi(s))$ es la derivada del camino $\mathbf{f}$ en el punto $t = \varphi(s)$, el cual es un vector en $\mathbb{R}^n$. Siguiendo la tradición de escribir primero los escalares y luego los vectores en un producto, la fórmula anterior la escribimos como

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = \varphi'(s)f'(\varphi(s))$$

Esta fórmula describe la relación entre los vectores velocidad del camino $\mathbf{f}$ con los correspondientes de su reparametrización $\bar{\mathbf{f}}$: según ella el camino $\bar{\mathbf{f}}$ se mueve en el punto $\bar{\mathbf{f}}(s) \in \mathbb{R}^n$ a una velocidad igual $\mathbf{f}'(s)$ veces la velocidad que llevaría el camino $\mathbf{f}$ en ese punto (el cual corresponde al punto $t = \varphi(s)$) (figura 6.12)

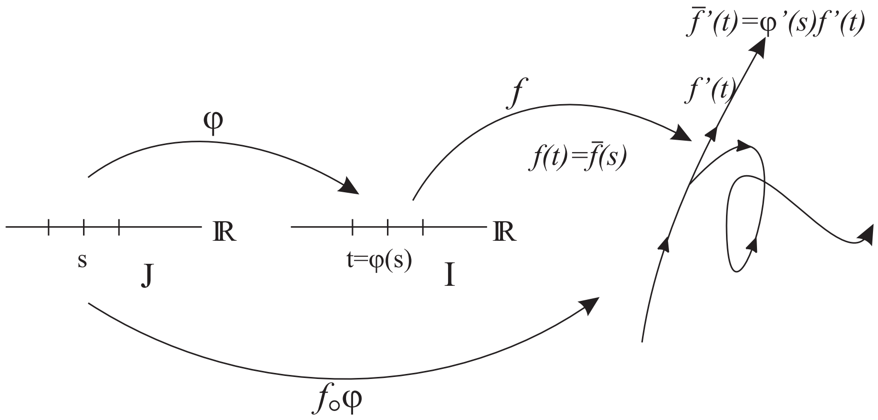


Figura 6.12: Diagrama de la composición $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \circ \varphi$

Consideremos, por ejemplo el camino $\mathbf{f} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$. La curva que describe es el arco de la parabola $y = x^2$ comprendido entre $[-1,1]$. Ciertamente este es un camino regular, pues su vector velocidad es $\mathbf{f}'(t) = (1, 2t) \neq (0,0)$ para todo $t \in [-1,1]$. Sea $\varphi : [0, 2\pi] \to [-1,1]$ la función $t = \varphi(s) = -\cos s$. Esta cumple la condición de sobreyectividad y diferenciabilidad que habíamos pedido para que la composición
$\mathbf{f}\circ\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sea un nuevo camino diferenciable (de clase C^1). Esta es entonces la reparametrización $\bar{\mathbf{f}}$ de $\mathbf{f}$ dada por:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = (f\circ\varphi)(s) = f(\varphi(s)) = f(-\cos s) = (-\cos s, \cos^2 s), s \in [0, 2\pi]$$

El vector de velocidad $\bar{\mathbf{f}}$ es:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = (\operatorname{sen} s, -2 \operatorname{sen} s \cos s)$$

el cual, como dijimos, se puede escribir como

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = (\operatorname{sen} s)(1, -2\cos s) = \varphi'(s) f'(\varphi(s))$$

Obsérvese que mientras que el camino $\mathbf{f}$ recorre una vez el arco de la parabola $y = x^2$ del punto $\mathbf{f}(-1) = (-1, 1)$ al punto $\mathbf{f}(1) = (1, 1)$, tomando para tal recorrido 2 segundos, la reparametrización $\bar{\mathbf{f}}$ efectúa el mismo recorrido de ida y vuelta, comenzando también por el punto $\bar{\mathbf{f}}(0) = (-1, 1)$, yendo de este al punto $(1, 1) = \bar{\mathbf{f}}(\pi)$ (durante los primeros π segundos) y regresando luego al punto $(-1, 1) = \bar{\mathbf{f}}(2\pi)$ (en los siguiente π segundos) figura 6.13

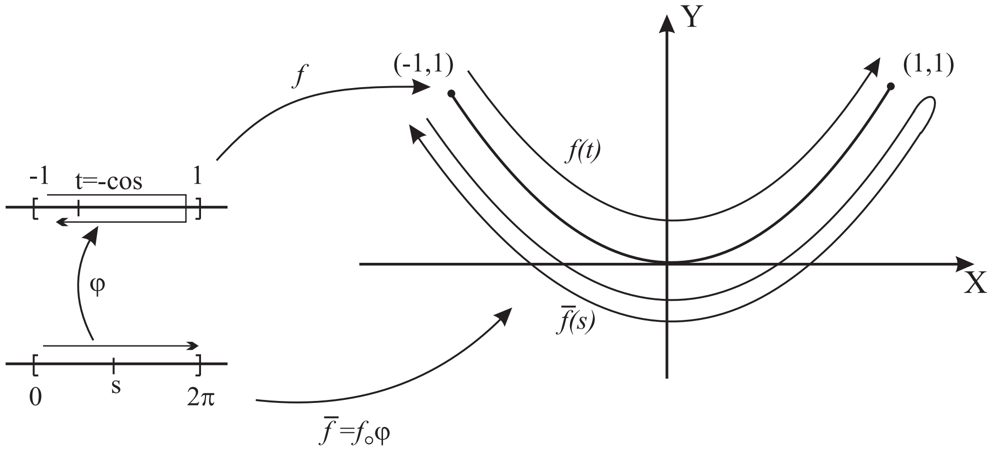


Figura 6.13: Los recorridos del camino $\mathbf{f}$ y de su reparametrización $\bar{\mathbf{f}}$

Definición 6.1 *Sea* $\mathbf{f} : I \subseteq I\!R \to I\!R^n$ *un camino regular. Sea* $\varphi : J \subseteq I\!R \to I$ *una función de clase* C^1 *sobreyectiva que* $\varphi'(s) \neq 0, \forall s \in J$*. Entonces el camino* $\bar{\mathbf{f}} = f \circ \varphi : J \subseteq I\!R \to I\!R^n$ *se llama reparametrización del camino* $\mathbf{f}$ *(el cual también resulta ser regular), [1], [5], [20].*

La condición $\varphi'(s) \neq 0, \forall s \in J$ nos dice que (siendo φ de clase C^1), o $\varphi'(s) > 0, \forall s \in J$, o $\varphi'(s) < 0, \forall s \in J$. Escribamos $I = [a, b],\ J = [c, d]$ y veamos qué sucede en cada uno de los casos.

Si $\varphi'(s) > 0, \forall s \in J$, entonces φ es una función creciente en J de modo que $\varphi(c) = a,\ \varphi(d) = b$ y así los puntos inicial y final de $\bar{\mathbf{f}}$ coinciden con los respectivos de $\mathbf{f}$, pues $\bar{\mathbf{f}}(c) = (f \circ \varphi)(c) = f(\varphi(c)) = f(a)$ y $\bar{\mathbf{f}}(d) = (f \circ \varphi)(d) = f(\varphi(d)) = f(b)$. Además el vector velocidad $\bar{\mathbf{f}}'(s)$ se obtiene de multiplicar el vector velocidad $\mathbf{f}'(\varphi(s))$ por el escalar positivo $\varphi'(s)$, $s \in J$, de modo que ambos vectores tiene la misma dirección. En este caso, entonces, en camino $\bar{\mathbf{f}}$ recorre la curva descrita por $\mathbf{f}$, en la misma dirección que lo hace $\bar{\mathbf{f}}$. Diremos que $\bar{\mathbf{f}}$ es una reparametrización de $\mathbf{f}$ que conserva la orientación. (figura 6.14)

Un análisis similar en el caso de que $\varphi'(s) < 0, \forall s \in J$ nos dice que en tal caso $\bar{\mathbf{f}}$ recorre la curva descrita por $\mathbf{f}$ en dirección contraria a la de $\bar{\mathbf{f}}$. En este caso se tiene que $\varphi(c) = d,\ \varphi(d) = a$, de modo que el punto inicial de $\bar{\mathbf{f}}$ es $\bar{\mathbf{f}}(c) = f(\varphi(c)) = f(b) =$

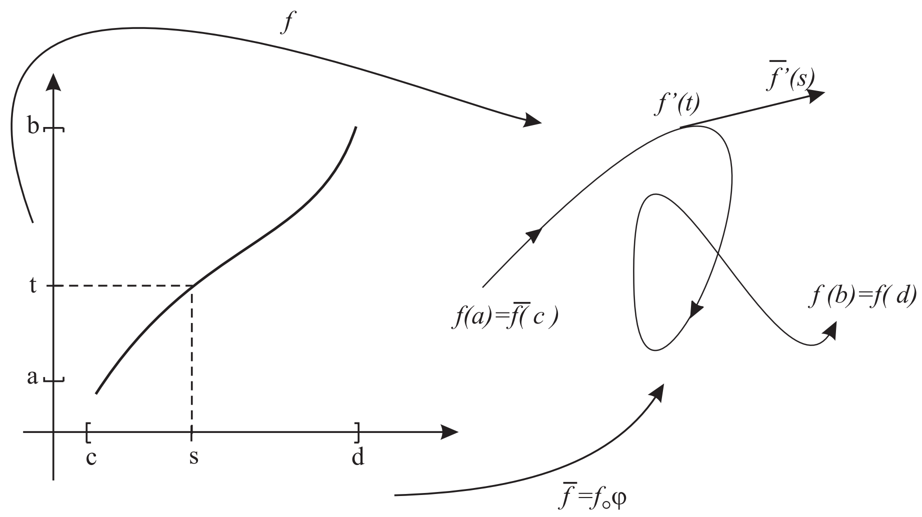


Figura 6.14: Una reparametrización que conserva la orientación

punto final de $\mathbf{f}$, y el punto final de $\bar{\mathbf{f}}$ es $\bar{\mathbf{f}}(d) = f(\varphi(d)) = f(a) =$ punto final de $\mathbf{f}$ en este caso diremos que $\bar{\mathbf{f}}$ es una reparametrización que invierte la parametrización. (figura 6.16)

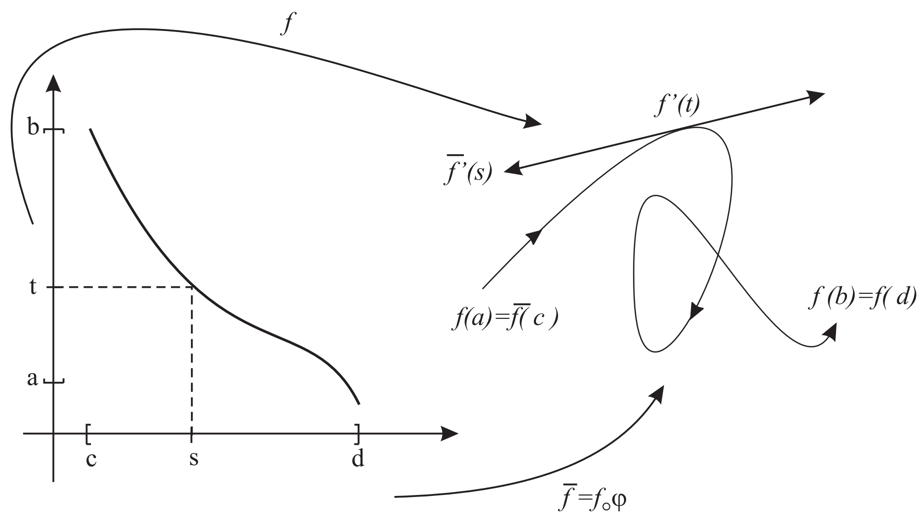


Figura 6.15: Una reparametrización que invierte la orientación

Ejemplo 6.4.1 .

Sea $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un camino regular. Sea k una constante positiva. Para recorrer la curva descrita por $\mathbf{f}$, k veces podemos tomar la función $\varphi : [0, \dfrac{b-a}{k}] \to [a, b]$ dada

por $\varphi(s) = ks + a$.
La reparametrización $\bar{\mathbf{f}} : [0, \dfrac{b-a}{k}] \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{f}}(s) = (f \circ \varphi)(s) = f(ks + a)$ tiene por vector velocidad a

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = \varphi'(s) f'(\varphi(s)) = k(f'(ks + a)),\ s \in [0, \frac{b-a}{k}]$$

Si quisiéramos recorrer la curva descrita por **f** con una velocidad k veces mayor que la correspondiente de **f**, pero en sentido inverso al de **f**, podemos considerar la función $\varphi : [0, \dfrac{a-b}{k}] \to [a, b]$ dada por $\varphi(s) = ks+b$ donde k ahora es una constante negativa.
La reparametrización $\bar{\mathbf{f}} : [0, \frac{a-b}{k}] \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{f}}(s) = f(ks + b)$ tiene por vector velocidad a

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = \varphi'(s) f'(\varphi(s)) = kf'(ks + b), s \in \left[0, \frac{a-b}{k}\right]$$

Un caso particular de esta última situación es cuando $k = -1$. En tal caso el camino $\bar{\mathbf{f}} : [0, b - a] \to \mathbb{R}^n$ dado por $\bar{\mathbf{f}}(s) = f(b - s)$, recorre la curva descrita por **f** con la misma velocidad -en módulo- de **f** pero en sentido inverso al de **f**. En este caso particular se dice que el camino $\bar{\mathbf{f}}$ es el (camino) inverso de **f** y se suele denotar como $-f$. Una manera alternativa de estudiar este camino, dejándolo definido en el mismo intervalo $[a, b]$ en que está definido **f**, es tomar la función $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, $\varphi(s) = a + b - s$. Así tendríamos (figura 6.16)

$$(-f)(s) = f(\varphi(s)) = f(a + b - s), s \in [a, b]$$

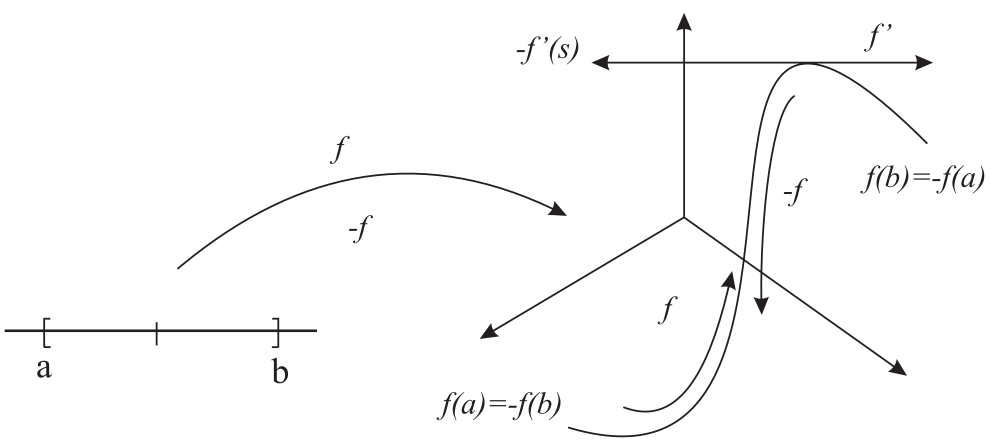


Figura 6.16: El inverso del camino **f**

Ejemplo 6.4.2 .

Sea $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. La curva que describe $\mathbf{f}$ es, como sabemos, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, a partir del punto $(0, 1)$ y en sentido antihorario. Según el ejercicio anterior, tomando $k = 5$
Tenemos que el camino $\bar{\mathbf{f}} : [0, \frac{2\pi}{5}] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\bar{\mathbf{f}}(s) = f(5s) = (\cos 5s, \operatorname{sen} 5s)$ recorres la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, 5-veces más rápido que $\mathbf{f}$, haciendo dicho recorrido igual que $\mathbf{f}$, en sentido antihorario. Poniendo ahora $K = -2$, tenemos que el camino $\bar{\mathbf{f}} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = f(-2s + 2\pi) = (\cos(-2s + 2\pi), \operatorname{sen}(2s + 2\pi)) = (\cos 2s, -\operatorname{sen} 2s)$$

recorrerá la curva $x^2 + y^2 = 1$, partiendo de (1,0) y en sentido horario, con una velocidad del doble (en magnitud) de $\mathbf{f}$. El camino inverso de $\mathbf{f}$ será $-f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $(-f)(s) = f(2\pi - s) = (\cos(2\pi - s), \operatorname{sen}(2\pi - s)) = (\cos s, -\operatorname{sen} s)$. Este camino, como dijimos ya, debe recorrer la curva $x^2 + y^2 = 1$ en 2π segundos (igual que $\mathbf{f}$) pero en sentido contrario al de $\mathbf{f}$. (figura 6.17)

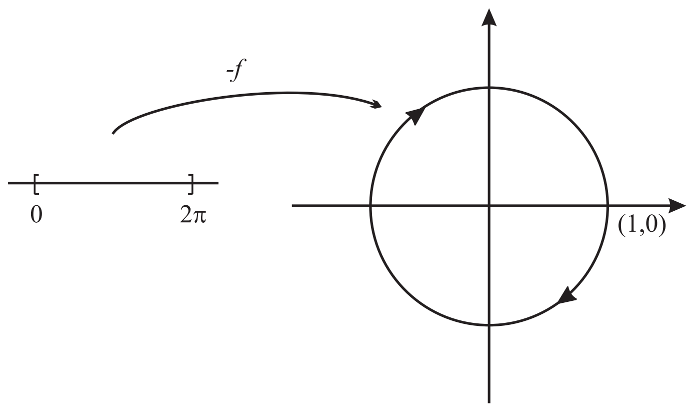


Figura 6.17: El camino inverso de $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

Teorema 6.4.1 *Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 (0\ \mathbb{R}^3)$ un camino regular y sea otra función compuesta $\bar{\mathbf{f}} = f \circ \varphi : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) una reparametrización de él (donde $\varphi : J \to I$ es la función de la definición). Entonces la recta tangente a la curva C (traza de $\mathbf{f}$) en $\mathbf{f}(t_0)$ (t_0 un punto de I) es la misma que la recta tangente a C en $\bar{\mathbf{f}}(s_0)$, donde $t_0 = \varphi(s_0)$*

Para el caso de una camino regular en R^3, digamos $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, el plano normal a la curva correspondiente en el punto $\mathbf{f}(t_0)$ está determinado por tal punto y por el vector $\mathbf{f}'(t_0) \in \mathbb{R}^3$. como habíamos visto, tal plano es

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

donde $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Sea $\bar{\mathbf{f}} = f \circ \varphi : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $\mathbf{f}$. Sea s_0 de modo que $\varphi(s_0) = t_0$. Entonces

$$\bar{\mathbf{f}}'(s_0) = \varphi'(s_0) f'(\varphi(s_0)) = \varphi'(s_0)(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0$$

de modo que el plano normal a la curva en $\bar{\mathbf{f}}(s_0) = f(t_0)$ es

$$\varphi'(x_0)x'(t_0)(x - x(t_0)) + \varphi'(s_0)y'(t_0)(y - y(t_0)) + \varphi'(s_0)z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

Como $\varphi'(x_0) \neq 0$, podemos dividir toda ecuación por $\varphi'(s_0)$ y llegar a la ecuación del plano obtenida con el camino $\mathbf{f}$. Así pues, si una curva C en $\mathbb{R}^3$ es la imagen de un camino regular $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, las rectas tangentes y planos normales a C se pueden obtener con cualquier reparametrización $\bar{\mathbf{f}}$ de $\mathbf{f}$.

Ejemplo 6.4.3 .

Sea el camino (la hélice) $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en el punto $\mathbf{f}(\dfrac{\pi}{4})$. Para limitar nuestra atención sólo en un pedazo de la curva alrededor de ese punto, restringimos el dominio de $\mathbf{f}$ al intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sea $\varphi : [1, e^{\pi/2}] \to [0, \dfrac{\pi}{2}]$ la función $\varphi(s) = \ln s$. Entonces $\bar{\mathbf{f}} = f \circ \varphi : [1, e^{\pi/2}] \to \mathbb{R}^3$, $\bar{\mathbf{f}}(s) = f(\varphi(s)) = (\cos(\ln s), \operatorname{sen}(\ln s), \ln s)$ es una reparametrización del arco hélice descrito por $\mathbf{f}$. Para $s = e^{\pi/4}$ tenemos $\bar{\mathbf{f}}(s) = f(\dfrac{\pi}{4})$. El vector velocidad $\bar{\mathbf{f}}$ es

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = \left(-\frac{1}{s} \operatorname{sen}(\ln s), \frac{1}{s} \cos(\ln s), \frac{1}{s} \right)$$

que en $s = e^{\pi/4}$ se ve como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}(e^{\pi/4}) &= \left(-e^{-\pi/4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right), e^{-\pi/4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right), e^{-\pi/4} \right) \\ &= e^{-\pi/4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

Así que la recta tangente a la curva en $\bar{\mathbf{f}}(e^{\pi/4})$ tiene por ecuaciones paramétricas a

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - e^{-\pi/4} \dfrac{\sqrt{2}}{2} s \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + e^{-\pi/4} \dfrac{\sqrt{2}}{2} s \\ z = \dfrac{\pi}{4} + e^{-\pi/4} s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

que son la ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) y tiene a $v = (a, b, c)$ por vector paralelo se pueden ver en general como

$$\begin{cases} x = x_0 + kat \\ y = y_0 + kbt \quad ; \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + kct \end{cases}$$

donde k es cualquier constante no nula, pues al ser v paralelo a la recta, el vector $kv = (ka, kb, kc)$ también lo es $(k \neq 0)$. El plano normal pasa por $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ y tiene por vector normal a $\bar{\mathbf{f}}'(e^{\pi/4})$, es entonces

$$-e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-\pi/4}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$$

o sea

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$$

6.4.1. Ejercicios propuestos

En los siguientes ejercicios considere el camino regula $\mathbf{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$. Diga cuáles de las funciones $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dadas, produce una reparametrización $\bar{\mathbf{f}} = f \circ \varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ del camino $\mathbf{f}$.

1. $\varphi(x) = s$
2. $\varphi(s) = -s$
3. $\varphi(s) = 2s^2 - 1$
4. $\varphi(s) = 0.5(x - 1)$
5. $\varphi(s) = s^3$
6. Sea $\mathbf{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\mathbf{f}(t) = (t^2 + 1, t^3 + 3t + 2)$. Sea $\varphi : [-1, 1] \to [0, 1]$ una función de clase C^1, sobreyectiva, tal que $\varphi'(s) > 0, \forall s \in [-1, 1]$. Si $\varphi(0) = 1/2, \varphi'(0) = 2$, obtenga el vector velocidad de la reparametrización $\bar{\mathbf{f}} = f \circ \varphi$ para $s = 0$.

6.5. Reparametrización por longitud de arco

Consideremos un camino regular $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y supongamos un punto de paso $\mathbf{p} = \mathbf{f}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ de la curva que describe (t_0 algún punto en $[a, b]$). Siendo $\mathbf{f}$ de clase $\mathbf{C}^1$ podemos calcular, para cada $t \in [a, b]$, la longitud de $\mathbf{f}$ entre $t = t_0$ y t. Esta es claramente una función de t, designada por $\psi(t)$, [1], [5]. Entonces

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}'(u)\| du$$

(Aceptamos que si $t < t_0$ (i.e. el punto $\mathbf{f}(t)$ está antes en el recorrido de $\mathbf{f}$ que $\mathbf{p} = \mathbf{f}(t_0)$), entonces la longitud del camino es negativa) Según el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\psi'(t) = \|\mathbf{f}'(t)\|, \ t \in [a, b]$$

Como nuestro camino $\mathbf{f}$ es regular, entonces $\psi'(t) = \|\mathbf{f}'(t)\| > 0, \ \forall t \in [a, b]$. Además, es claro que ψ es una función de clase $\mathbf{C}^1$, pues su derivada $\psi'(t) = \|\mathbf{f}'(t)\|$ es continua.

Sea $[c, d] \subset \mathbb{R}$ el intervalo en el que la función ψ manda las imágenes $\phi(t), \ t \in [a, b]$ por ejemplo, si hubiéramos tomado $\mathbf{p} = \mathbf{f}(a)$, entonces la función $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\psi(t) = \int_{a}^{t} \|\mathbf{f}'(u)\| du$$

manda el intervalo $[a, b]$ al intervalo $[0, \ell(\mathbf{f})]$ sobreyectivamente donde $\ell(\mathbf{f})$ es la longitud de $\mathbf{f}$ entre $t = a$ y $t = b$.

puesto que $\psi : [a, b] \to [c, d]$ es una función de clase $\mathbf{C}^1$ tal que $\psi'(t) > 0, \forall t \in [a, b]$, existe entonces la función inversa $\psi^{-1} : [c, d] \to [a, b]$, la cual también es de clase $\mathbf{C}^1$ y además, como $(\psi^{-1})(\psi(t)) = 1, \ \forall t \in [a, b]$, también se tiene $(\psi^{-1})(s) > 0, \forall s \in [c, d]$.

Obsérvese que la función $\psi^{-1} : [c, d] \to [a, s]$ tiene entonces todas las características que se necesitan para que $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \circ \phi$ sea una reparametrización de $\mathbf{f}$. para $s \in [c, d]$ tenemos

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = (\mathbf{f} \circ \phi)(s) = \mathbf{f}(\phi(s))$$

(Podemos poner as como un longitud de una parte de la curva descrita por $\mathbf{f}$) Obsérvese que el vector velocidad $\bar{\mathbf{f}}'(s)$ es

$$\bar{\mathbf{f}}'(s) = \phi'(s)\mathbf{f}'(\phi(s))$$

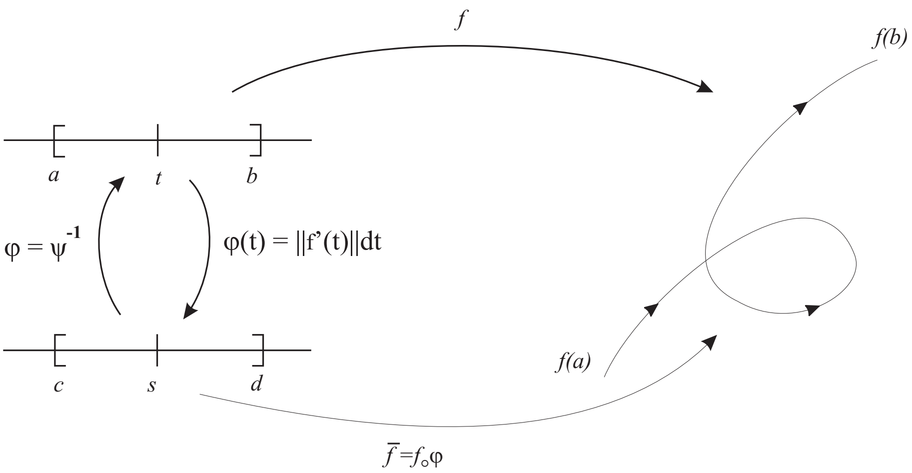


Figura 6.18: Gráfica de la curva C descrita por $\mathbf{f}$ y $\bar{\mathbf{f}}$

Pero

$$\phi'(s) = (\psi^{-1})(s) = (\psi^{-1})'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{1}{\|\mathbf{f}'(t)\|}$$

donde $s = \psi(t) = \int_0^t \|\mathbf{f}'(u)\| du$. Entonces

$$\|\bar{\mathbf{f}}'(s)\| = \frac{1}{\|\mathbf{f}'(t)\|}\|\mathbf{f}'(t)\| = 1$$

De modo que $\bar{\mathbf{f}}$ es una reparametrización de $\mathbf{f}$ cuya propiedad es recorre la curva de sus imágenes a una rapidez constante igual a la unidad. Diremos que $\bar{\mathbf{f}}$ es una reparametrización de $\mathbf{f}$ por longitud de arco, en el sentido de que la nueva variable dependiente s de $\bar{\mathbf{f}}$ es justamente la longitud del camino entre t_0 y t

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}'(u)\| du$$

Nótese que $t_0 \in [a, b]$ no jugo papel alguno en la discusión anterior. Podemos entonces sin perdida de generalidad, tomar siempre $t_0 = a$.

Ejemplo 6.5.1 .

1. Considere el camino $\mathbf{f} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$ dado por:

   $$\mathbf{f}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

   Este es la parametrización por longitud de arco del círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Calcule $\mathbf{f}''(s)$. Compruebe que este vector es ortogonal a $\mathbf{f}'(s)$ para toda s en $[0, 2\pi r]$. Interprete geométricamente este hecho. Calcule$\|\mathbf{f}''(s)\|$.

2. Consideremos el camino $\mathbf{f}[0, \sinh 3] \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\mathbf{f}(s) = \Big(\ln(s + \sqrt{s^2+1}), \cosh(\ln(s + \sqrt{s^2+1}))\Big)$$

   Esta es la parametrización por longitud de arco de la cateriana $y = \cosh x$ en el intervalo $[0, 3]$. Calcule $\mathbf{f}''(s)$. Compruebe que este vector es ortogonal a $\mathbf{f}'(s)$ para toda s en $[0, \sin h3]$. Calcule $\|\mathbf{f}''(s)\|$.

3. Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un camino parametrizado por longitud de arco. Demuestre que el vector $\mathbf{f}''(s)$ es ortogonal al vector $\mathbf{f}'(s)$ $\forall s \in I$.

6.6. Curvatura

La idea general que se persigue en el estudio de la curvatura de una curva es la de medir la rapidez con que la curva se aleja de su recta tangente en un punto de $\mathbf{p}$ de ella.

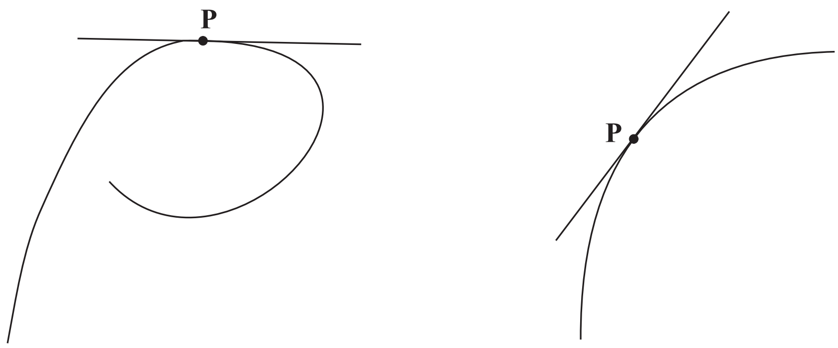


Figura 6.19: Dos curvas con diferentes curvaturas en el punto $\mathbf{p}$

Para tener una medida de la rapidez de variación en la dirección del vector velocidad de un camino, debemos tomar un camino que tenga rapidez $\|\mathbf{f}'(t)\|$ constante digamos igual a la unidad pues en tal caso $\|\mathbf{f}'(t)\|$ seria una medida (la medida que necesitamos) de cuanto está cambiando la dirección del vector $\mathbf{f}'(t)$ de la curva en el punto $\mathbf{f}(t)$.

Definición 6.2 *Sea* $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *un camino dos veces diferenciable parametrizado por longitud de arco. Al número* $k(s) = \|\mathbf{f}''(s)\|$ *se le llama curvatura de* $\mathbf{f}$ *en la variable s, [5], [20].*

Observación:

- Seguimos respetando el uso de la letra s para denotar a la variable independiente (la longitud de arco) de un camino reparametrizado por longitud de arco.

- Usaremos la notación $\mathbf{T}(s)$ para designar al vector $\mathbf{f}'(s)$, llamado vector tangente unitario de $\mathbf{f}$ en s. Entonces $\mathbf{T}(s)$ es el vector tangente (el vector velocidad) del camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ parametrizado por longitud de arco, y así:

$$\|\mathbf{T}(s)\| = 1 \ \forall s \in I$$

. Con esta notación la curvatura de $\mathbf{f}$ en s se ve como:

$$k(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

Nota:

- Sea el camino regular $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dos veces diferenciable, la curvatura denotada por $k(t)$ está dada por:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)\|}{\|\mathbf{f}'(t)\|^3}$$

- Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un camino regular dos veces diferenciable la curvatura está dada por
$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}$$

Definición 6.3 *Sea $\mathbf{f} : I \subseteq I\!R \to I\!R^2$ un camino regular dos veces diferenciable. Para los puntos $\boldsymbol{p}(t) \to I\!R^2$ de la curva que describe $\mathbf{f}$ en los cuales la curvatura $k(t)$ es no nula, se define el radio de curvatura de $\mathbf{f}$ en $\boldsymbol{p}$ denotado por $r(t)$, como $r(t) = \dfrac{1}{|k(t)|}$. Se llama círculo osculador de la curva en $\boldsymbol{p}$ al círculo que pasa por $\boldsymbol{p}$, tiene radio igual a $r(t)$, y cuyo centro se encuentra en la dirección del vector $\vec{\mathbf{f}}''(s)$, donde $\vec{\mathbf{f}}$ es la reparametrización por longitud de arco de $\mathbf{f}$ (es decir si $C(t) \in I\!R^2$ es el punto donde se encuentra el centro, el vector $C(t) - \mathbf{f}(t)$ debe tener la misma dirección que el vector $\vec{\mathbf{f}}''(s)$), [17], [18], [20].*

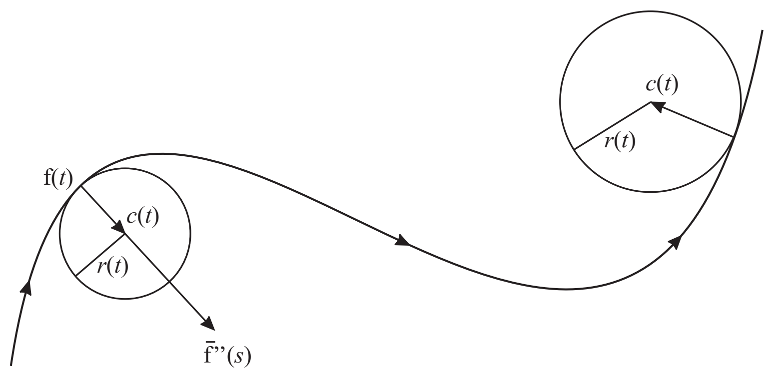


Figura 6.20: El círculo osculador en una curva

Observaciones:

- El vector $\mathbf{c}(t) - \mathbf{f}(t)$ es tal que:

  1. Tiene magnitud igual a $r(t) =$ radio de curvatura.
  2. Si $k(t) > 0$, su dirección coincide con la del vector unitario $\nabla(s) = \dfrac{1}{\|\mathbf{f}'(t)\|}(-y'(t), x'(t))$, pues en este caso los vectores $\vec{\mathbf{f}}''(s)$ y $\nabla(s)$ apuntan a la misma dirección.
  3. Si $k(t) < 0$, su dirección es opuesta a la del vector $\nabla(s)$. Estas tres condiciones se pueden escribir con la única fórmula:

  $$\mathbf{c}(t) - \mathbf{f}(t) = \frac{1}{k(t)}\nabla(s)$$

  de donde el centro del círculo osculador (llamado centro de curvatura) debe estar en el centro del punto $\mathbf{c}(t) = \mathbf{f}(t) + \dfrac{1}{k(t)}\nabla(s)$ o mejor aún en el punto

  $$C(t) = \left(x(t) - \frac{y'(t)}{k(t)}\|\mathbf{f}'(t)\|, y(t) + \frac{x'(t)}{k(t)\|\mathbf{f}''(t)\|}\right)$$

6.6.1. Ejercicios propuestos

1. Si $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $G(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$ es la parametrización de una recta . Determine la curvatura en cualquier punto.

2. Dada la función $y = \varphi(x)$. Demostrar que la curvatura en x está dada por

$$k(x) = \frac{\varphi''(x)}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{3/2}}$$

3. Determine la curvatura de la curva dada en el punto indicado de los siguientes ejercicios:

   a) $\lambda(t) = (\cosh t, \sin ht, 2t)$, en el punto $p = \lambda(0)$.

   b) $\lambda(t) = (t^2 + 1, t^2 - 1, t)$, en el punto $p = \lambda(1)$.

   c) $\lambda(t) = (e^t, e^{-t}, t)$, en el punto $p = \lambda(0)$.

4. En los siguientes ejercicios determine la curvatura (con signo) de la curva en el plano, en un punto arbitrario de ella:

   a) $\lambda(t) = (\cosh t, \sinh t)$.

   b) $\lambda(t) = (t^2 - t^2, t^2 - t)$.

   c) $\lambda(t) = (e^t, e^{-t})$.

5. Calcule la curvatura de la elipse $\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \lambda(t) = (a \cos t, b \sin t)$, en donde $0 < b < a$ ¿En qué puntos la curvatura alcanza sus valores máximo y mínimo?.

6. Calcule la curvatura de la parábola $y = x^2$. ¿En qué punto de ella la curvatura alcanza su valor máximo?. ¿Existe algún punto en que la curvatura sea mínima?.

7. Determine la curvatura de la parábola de m-ésimo orden $y = x^n$.

8. En los siguientes ejercicios determine el círculo osculador de la curva dada en los puntos indicados

   a) $y = x^2$, en el origen de coordenadas.

   b) $y = \cos x$, en el punto (0,1).

   c) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, en el punto (0,1).

6.7. Torsión

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ un camino regular tres veces diferenciable parametrizado por longitud de arco. Centraremos ahora nuestra atención en la rapidez con que una curva se aleja de su plano osculador en la vecindad de un punto dado de ella. Esta rapidez está relacionada (directamente) con el concepto que estudiaremos en esta sección llamado torsión y es una cantidad escalar.

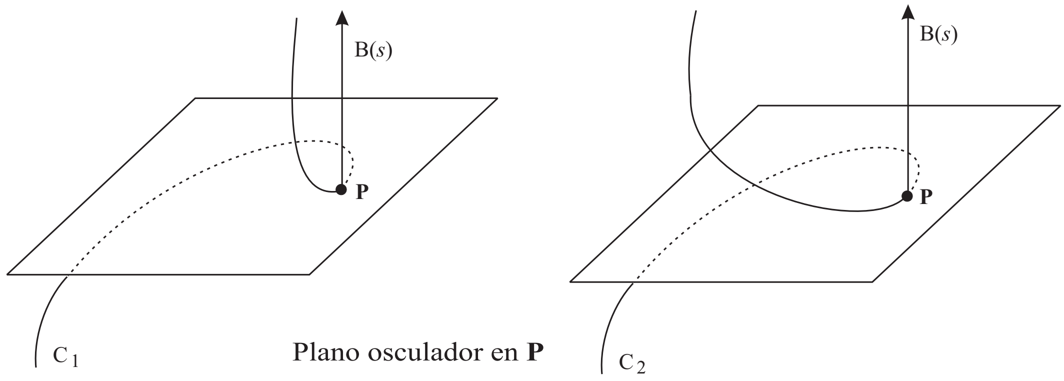


Figura 6.21: La curva C_1 tiene "más torsión" que la curva C_2 en $\mathbf{p}$

La forma de medir la rapidez de alejamiento de la curva C de su plano osculador es por medio del vector binormal $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \nabla(s)$ que es un vector unitario ortogonal al plano osculador de $\mathbf{f}$ en s. Puesto que $\|\mathbf{B}(s)\| = 1$, $\forall s \in I$, $\|\mathbf{B}'(s)\|$ medirá precisamente la rapidez con que el vector binormal $\mathbf{B}(s)$ está cambiando de dirección en los alrededores del punto estudiado, [5], [20].

Puesto que $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \nabla(s)$, tenemos, derivando

$$\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}'(s) \times \nabla(s) + \mathbf{T}(s) \times \nabla'(s)$$

$\Rightarrow \mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}(s) \times \nabla'(s)$. Por otra parte, puesto que $\mathbf{B}(s)$ es un vector unitario, tenemos que el vector $\mathbf{B}'(s)$ es ortogonal a $\mathbf{B}(s)$. En resumen tenemos los hechos siguientes:

1. $\mathbf{B}'(s) \perp \mathbf{B}(s) \Rightarrow \mathbf{B}(s)$ pertenece al plano osculador de $\mathbf{f}$ en s.

2. $\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}(s) \times \nabla'(s)$ lo cual nos permite concluir que $\mathbf{B}'(s) \perp \mathbf{T}(s)$.

Conclusión: $\mathbf{B}'(s)$ es un vector paralelo al vector $\nabla(s)$. Debe haber entonces un escalar $\tau(s)$ que $\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\nabla(s)$ ($|\tau(s)| = \|\mathbf{B}'(s)\|$).

Definición 6.4 *Sea* $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *un camino regular tres veces diferenciable parametrizado por longitud de arco tal que* $\mathbf{f}''(s) \neq 0$, $\forall s \in I$ *(i.e. la curvatura* $k(s)$ *es* *siempre no nula). El número real $\tau(s)$ tal que $\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\nabla(s)$, donde $\mathbf{B}(s)$ y $\nabla(s)$ son los vectores binormal y normal principal de $\mathbf{f}$ en s respectivamente, se llama torsión de $\mathbf{f}$ en s, [5], [18].*

Observaciones:

- Una curva en el espacio queda caracterizada por completo por las dos medidas; la rapidez con que se "curva" y la rapidez con que se "tuerce".
- Una curva es plana (es decir, es la imagen de un camino $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{f}(s)$)se encuentra en el plano en $\mathbb{R}^3$, $\forall s \in I$ si y sólo si su torsión es igual a cero, $\forall s \in I$. En efecto si $\tau(s) = 0$, se tiene que $\mathbf{B}'(s) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}'(s) = v$, $\forall s \in I$. De aquí se tiene que $\mathbf{f}'(s).\mathbf{B}(s) = \mathbf{f}'(s).v = 0$, $\forall s \in I$ o sea que $\dfrac{d}{ds}(F(s).v) = 0$, de donde $\mathbf{f}(s).v = cte$, $\forall s \in I$, y por lo tanto, concluiremos finalmente que $\mathbf{f}(s)$ se encuentra en el plano cuyo vector normal es v, $\forall s \in I$. Recíprocamente, si $\mathbf{f}(s)$ se encuentra en un plano $\forall s \in I$, entonces dicho plano es el plano osculador de la curva en todo punto de ella, por tanto el vector unitario $\mathbf{B}(s)$ no cambia de dirección, por lo que $\mathbf{B}'(s) = 0$, de donde $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I$.

6.7.1. Ejercicios propuestos

1. Sea $\bar{\mathbf{f}} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización por longitud de arco de $\mathbf{f}$. Calcular la torsión de $\mathbf{f}$ en t, donde $t = \varphi(s)$.
2. Demuestre que la curva (imagen del camino) $\lambda : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3$. $\lambda(t) = \left(\dfrac{1+t}{1-t}, \dfrac{1}{1-t^2}, \dfrac{1}{1+t}\right)$ es plana . Determine la ecuación del plano en que se encuentra.
3. Demuestre que la curva $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. $\mathbf{f}(t) = (a\cosh t, a\sinh t, bt)$tiene curvatura y torsión iguales en todos sus puntos, si y sólo si $a = b$.
4. Considere la hélice $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$. Demuestre que:
   a) El ángulo que forma la recta tangente con el eje z es constante.
   b) La recta normal en cualquier punto de la curva es perpendicular al eje z.
   c) El ángulo que forma la recta binormal con el eje z es constante.
   d) El cociente de la curvatura entre la torsión es constante.

Capítulo 7

Funciones reales de variable vectorial

Pre-Requisitos.- Para la compresión adecuada de este capítulo de funciones reales de variable vectorial se requiere de los conocimientos previos de:

- Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$.
- Superficies.
- Cálculo diferencial de funciones reales de variable real.

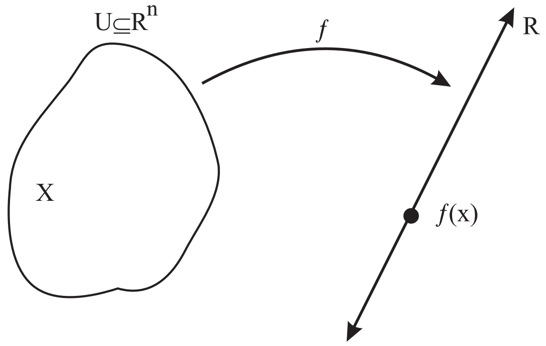
Objetivos.-

- Definir las derivadas parciales de una función de dos o más variables.
- Proporcionar una interpretación geométrica de las derivadas parciales.
- Discutir el criterio de las derivadas parciales de segundo orden para extremos relativos.
- Mostrar la relación del gradiente con la derivada direccional.
- Mostrar el uso del gradiente para hallar el plano tangente a una superficie.

7.1. Funciones reales de varias variables

Una función real de variable vectorial es una función del tipo $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde a cada n-ada ordenada de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de U, o bien a cada vector $\mathbf{x}$ de U, le hace corresponder un número real bien determinado $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El conjunto U es el dominio de la función f, su codominio es $\mathbb{R}$ y el rango de f es el conjunto:

$$\text{rango de } f = \{z \in \mathbb{R}/\ z = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in U\}$$



Observaciones:

- Cada una de estas funciones está constituida por:

  1. Su dominio $U \subseteq \mathbb{R}^n$
  2. Su codominio $\mathbb{R}$
  3. La regla que asocia a cada $\mathbf{x} \in U$, el número $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, imagen de $\mathbf{x}$ bajo f.

- Es usual, en una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dar simplemente la regla de $z = f(\mathbf{x})$ por medio de la cual se asocia a cada vector $\mathbf{x} \in U$, el número real $z = f(\mathbf{x})$ y no dar explícitamente el dominio U de f (se entiende que el codominio siempre es $\mathbb{R}$). En tal caso se debe entender que el dominio de f es el mayor subconjunto U del espacio $\mathbb{R}^n$ para la cual la regla $f(\mathbf{x})$ tenga sentido con $\mathbf{x} \in U$ (llamado dominio natural).

Ejemplo 7.1.1 *Determine el dominio natural de la función* $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Resolución.
$Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/1 - x^2 - y^2 > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 < 1\}[0.2cm] \end{aligned}$$

7.1.1. Ejercicios propuestos

1. En los siguientes ejercicios determine el domino natural de la función $z = f(x, y)$ dada y haga un esquema que represente este dominio en el plano xy.

   a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

   b) $f(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{y}}$

   c) $f(x, y) = \ln(1 + 2x^2 + 4y^2)$

   d) $f(x, y) = \ln(y \ln(1 + x + y))$

   e) $f(x, y) = \arccos(x + y)$

   f) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$

   g) $f(x, y) = \arctan \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}$

2. La función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x - y, \frac{y}{x}) = y^2 - x^2$. Determine $f(x, y)$. ¿Cual es el dominio de la función?

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. Calcule $f(0, 0, 0)$ y $f(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. ¿A dónde manda f los puntos de la esfera unitaria ?

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

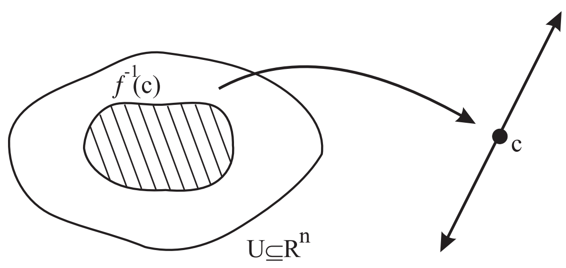
7.2. Geometría de las funciones de varias variables

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos la gráfica de f como el conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U,\ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

Dada la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y el número $c \in$ Rango de f, se define el nivel c de la función f como el conjunto.

$$\{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = c\} = f^{-1}(c)$$

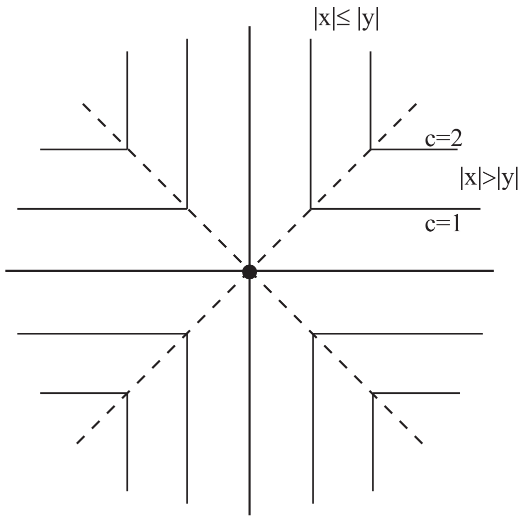


Ejemplo 7.2.1 *Describa las curvas de la función* $z = \text{mín}(|x|, |y|)$

Resolución:

$f^{-1}(c) = \{(c, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{mín}(|x|, |y|) = c\}$

$$c = \begin{cases} |x| & , |x| \leq |y| \\ |y| & , |y| < |x| \end{cases}$$

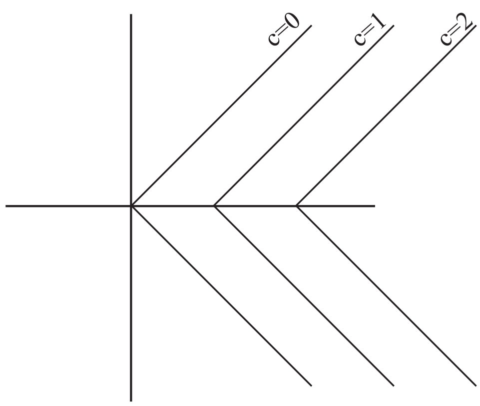


■

Ejemplo 7.2.2 *Describa las curvas de nivel de la función* $f(x, y) = x - |y|$

Resolución:

- $f^{-1}(c) = \{(x, y)/ \ x = |y| + c\}$



■

7.2.1. Ejercicios propuestos

1. Describa las curvas de nivel de una función $f(x,y) = ax + by + c$.

2. A la gráfica de la función $f(x,y) = ax^2 + by^2$ se le llama "paraboloide elíptico". ¿Cómo son las curvas de nivel de esta función?

3. Se define "mínimo de dos números", mín : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como

$$\text{mín}(x,y) = \begin{cases} x & ,\text{si } x \leq y \\ y & ,\text{si } y < x \end{cases}$$

   Obtenga $\text{mín}(1,-1)$, $\text{mín}(3,\pi)$, $\text{mín}(3,e)$. Demuestre que la gráfica de esta función es simétrica respecto del plano $y = x$. Describa las curvas de nivel de esta función.

4. En los siguientes ejercicios, describa las curvas de nivel de las funciones dadas y haga una gráfica mostrando algunas de estas curvas.

   a) $f(x,y) = |x| - y$

   b) $f(x,y) = |x - y|$

   c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

   d) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$

   e) $f(x,y) = \arcsin(x + y)$

7.3. Límites y continuidad de funciones de varias variables

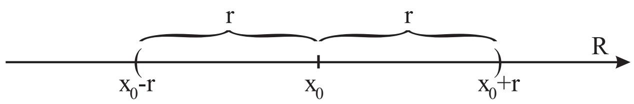
7.3.1. Bola abierta

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La bola abierta de centro $\mathbf{x}_0$ y radio r, denotada por $B(\mathbf{x}_0, r)$, es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que distan de $\mathbf{x}_0$ en menos que r. Es decir

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

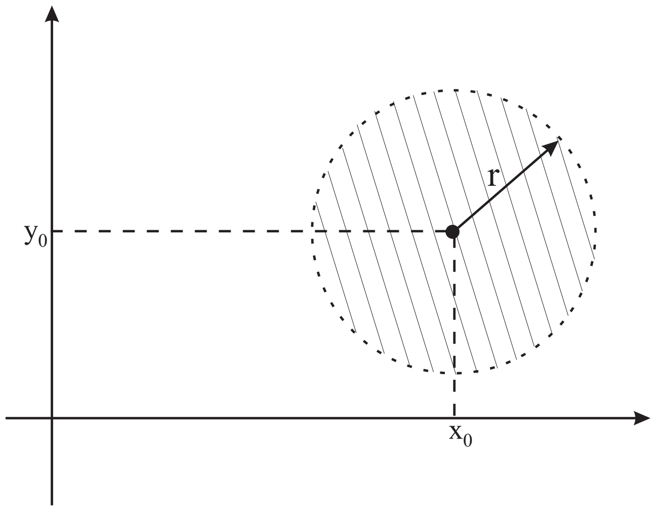
la bola abierta en $\mathbb{R}$ es:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} / x_0 - r < x < x_0 + r\}$$



La bola abierta en $\mathbb{R}^2$ es:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}_0, r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}
\end{aligned}
$$

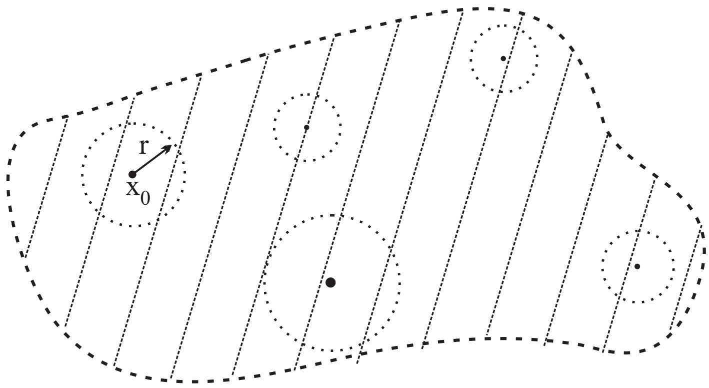


La bola abierta en $\mathbb{R}^3$ es:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

7.3.2. Conjunto abierto

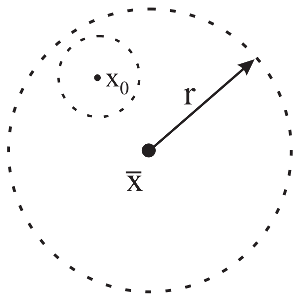
Se dice que el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, si para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$



Ejemplo 7.3.1 *Demostrar que la bola abierta es un conjunto abierto.*

Resolución:

- Considere la bola $B(\bar{\mathbf{x}}, s) \subset \mathbb{R}^n$



- Tomemos cualquier $\mathbf{x}_0 \in B(\bar{\mathbf{x}}, s)$.
- Sea $r < s - \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| > 0$
- Demostraremos que $B(\mathbf{x}_0, r) \subset B(\bar{\mathbf{x}}, s),\ y \in B(\mathbf{x}_0, r) \Rightarrow \|y - \mathbf{x}_0\| < r$

  $\Rightarrow \|y - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|y - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < r + \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < s - \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| + \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < s$

  $\Rightarrow y \in B(\bar{\mathbf{x}}, s)$.

$\blacksquare$

7.3.3. Frontera de un conjunto

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice que el punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de U si toda bola abierta con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ contiene puntos dentro de U y fuera de U. La frontera de U es el conjunto de puntos frontera de U, y se denota por ∂U.

$\mathbf{x}_0$ es punto frontera de U si para todo $r > 0$, $B(\mathbf{x}_0, r) \cap U \neq \emptyset$ y $B(\mathbf{x}_0, r) \cap U^c \neq \emptyset$

7.3.4. Límite de una función real de varias variables

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea x_0 un punto de U o bien un punto frontera de U. Se dice que el límite de f cuando x tiende a x_0 es L, lo cual se escribe como:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $x \in B(x_0, \delta) \cap (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) \in B(L, \varepsilon)$

Observación:

- Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\varphi(x)) = L,\ \lim_{x\to x_0} f(x,\psi(x)) = L$$

  ($y = \phi(x),\ y = \psi(x)$ son curvas que pasan por (x_0, y_0)).

Ejemplo 7.3.2 *Considere la función* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *¿Dónde está definida esta función?. Demuestre que el límite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *no existe.*

Resolución:

- Sea $y = \varphi(x) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{y=0}{=\!\!\rightarrow\!\!=} \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x(0)}{x^2+0^2} = 0$$

- Sea $y = \psi(x) = x$

$$\text{lím}\,(x,y) \to (0,0) f(x,y) \overset{y=x}{=\!\!\rightarrow\!\!=} \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x(x)}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y\to(0,0))} f(x,y)$ no existe ■

Teorema 7.3.1 *Sean* $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dos funciones definidas en al abierto* U *de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\mathbf{x}_0$ *un punto de* U *o un punto frontera de* U*. Suponga que:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \quad y \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$$

Entonces:

1. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L + M$
2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}). \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = LM$
3. *Si* $M \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{f}{g}(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\text{lím} f(\mathbf{x})}{\text{lím} g(\mathbf{x})} = \dfrac{L}{M}$

Corolario 7.3.1 *Si* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es una funcional polinomial, es decir, una función del tipo*

$$\mathbf{f}(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

donde a_{ij} *son constantes dadas, entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

7.3.5. Continuidad de funciones reales de varias variables

Sea $\boldsymbol{f}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in U$. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es una función continua en $\mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

Ejemplo 7.3.3 *Una función polinomial* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es continua en cualquier punto* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7.3.4 *Dada la función* $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la continuidad en $(0,0)$.

Ejemplo 7.3.5 *Analizar la continuidad de la función definida como:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observación:

- Sea $\mathbf{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es continua en U si lo es para todos y cada uno de los puntos $(x, y) \in U$.

Teorema 7.3.2 *Sean* $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones definidas en el abierto* U *de* $\mathbb{R}^n$. *Si* f *y* g *son continuas, entonces:*

1. *La función* $f + g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ *es continua.*

2. *La función* $fg : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ *es continua.*

3. *La función* $\dfrac{f}{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ *es continua en todo punto* $\mathbf{x} \in U$ *donde* $g(\mathbf{x}) \neq 0$

7.3.6. Ejercicios propuestas

1. Escriba explícitamente(como conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$ correspondiente)cada una de las siguientes bolas:

    a) B(3,0.5) en $\mathbb{R}$

    b) B((2,-3),0.1) en $\mathbb{R}^2$

    c) B((1,1,4),2) en $\mathbb{R}^3$

    d) B((2,-1,9,3,5),1) en $\mathbb{R}^5$

2. Demuestre que el conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. (Sugerencia: si $\emptyset$ no fuera abierto)

3. Demuestre que una condición necesaria para que el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ exista y sea L, es que si los límites (iterados)

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big)$$

    existen, deben valer L.

    a) Use la función
    $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$
    para demostrar que tal condición no es suficiente.

    b) ¿Cuál es la negación de la afirmación anterior?

4. Sea $f(x,y,z) = \dfrac{2x^2+y^2-z^2}{x^2-y^2}$. ¿Dónde está definida esta función?. Demuestre que el límite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$no existe.

5. En los siguientes ejercicios calcule el límite indicado

    a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left[\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{y-1}{y^2-1}\right]$

    b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\sin 3y}{2xy}$

    c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{(y^2+2y-3)(1-\cos x)}{x^2(y-1)}$

    d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy}$

6. En los ejercicios siguientes, diga en donde la función es continua, justificando en cada caso su respuesta.

   a) $f(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x + 9y - 10$

   b) $f(x,y) = \dfrac{2x + 3y^5}{x^2 + y^2 + 1}$

   c) $f(x,y) = \sin^2(x^3 \cos^4 y)$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4 + 3y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4 + 7y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. Estudie la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = sgn(xy)$

8. Se dice que la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, es continua respecto a su primera variable (*respecto de su segunda variable*) en el punto $(x_0, y_0) \in U$, si la función $\phi(x) = f(x, y_0)$ es continua en x_0 (si la función $\psi(y) = f(x_0, y)$ es continua en y_0, respectivamente).

   a) Demuestre que f es continua respecto de su primera variable en (x_0, y_0) si y sólo si $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0)$

   b) Demuestre que si f es continua en (x_0, y_0), entonces es continua respecto de su primera y segunda variable en ese punto.

   c) Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es continua respecto de su primera y segunda variable en (0,0)

7.4. Derivadas parciales de funciones reales de varias variables

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ un punto de U. Se define la derivada parcial de f con respecto de x en el punto $\mathbf{p}$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$ (o $f_x(),\ f_1(\mathbf{p}),\ D_1 f(\mathbf{p})$), como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

cuando éste límite existe. Del mismo modo, la derivada parcial de f con respecto a y en $\mathbf{p}$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$ (o $f_y(\mathbf{p}),\ f_2(\mathbf{p}),\ D_2 f(\mathbf{p})$) es el límite (si existe).

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in U$ se define la derivada parcial de f con respecto a su i-esima variable en el punto $\mathbf{x}_0$, denotado por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ (o $f_{x_i},\ f_i(\mathbf{x}_0),\ D_i f(-\mathbf{x}_0)$) como el límite

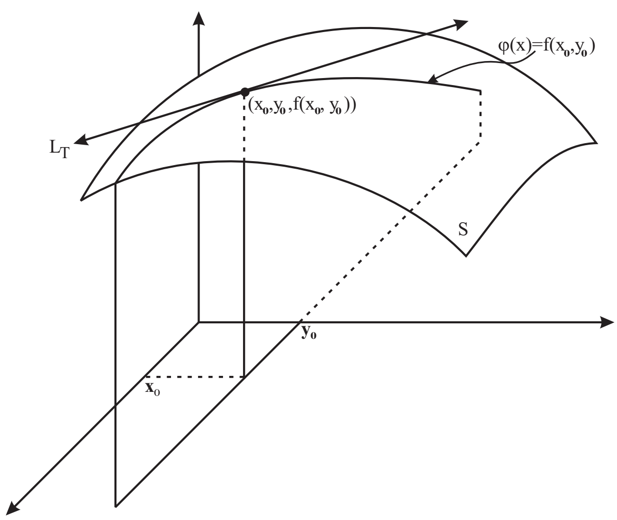
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + he_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

cuando éste existe, [5], [17], [3]. $(e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0}_{n-componentes}))$

Observaciones:

- Sea $z = f(x, y),\ Graf(f)$: "superficie" y $y = y_0$ el plano

$$\begin{cases} z = f(x, y) & : \text{Superficie} \\ y = y_0 & : \text{Plano} \end{cases}$$

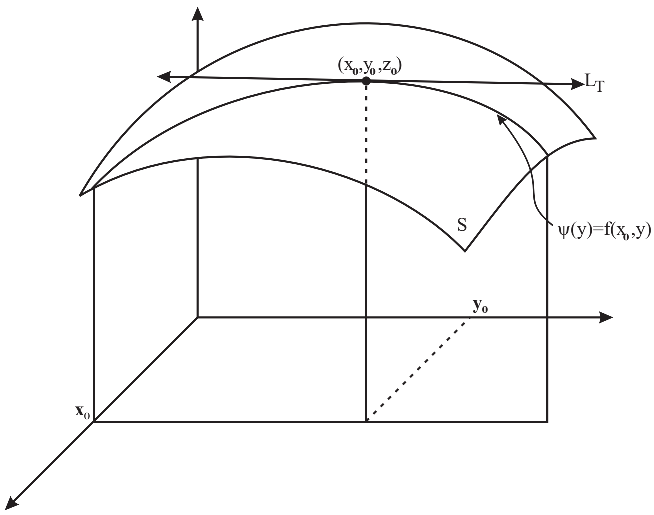


$\{z = \varphi(x) = f(x, y_0)$: Curva de intersección entre la superficie y el plano $y = y_0$

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} \\ \varphi'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la "superficie" $z = f(x, y)$ y el plano $y = y_0$ en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$.

- Sea $\begin{cases} z = f(x,y) & : \text{Superfice} \\ x = x_0 & : \text{plano} \end{cases}$



$z = f(x_0, y) = \psi(y)$: curva de intersección entre la superficie y el plano.

$$\begin{aligned} \psi'(y) &= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(y_0+h)-\psi(y_0)}{h} \\ \psi'(y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie $z = (x, y)$ y el plano $x = x_0$ en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$

- Las derivadas parciales son conceptos "puntuales", es decir, se habla de la derivada parcial de una función en un punto dado (de su dominio). Es por eso que en general, se debe hacer explícito el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ donde están evaluados $\dfrac{\partial f}{\partial x}$y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ escribiendo $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ sin embargo, muchas veces calculamos las derivadas parciales "en un punto cualquiera (x, y) de su dominio" En tal caso, basta escribir $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (0 f_x y f_y, o f_1 y f_2, o $D_1 f$ y $D_2 f$ respectivamente).

Ejemplo 7.4.1 *Sea* $f(x,y)=x^2y^3$. *Determinar* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Ejemplo 7.4.2 *Considere la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$. *¿f es continuar en* $(0,0)$*?*

7.4.1. Ejercicios propuestos

1. En los siguiente ejercicios obtenga las derivadas parciales indicadas.

   a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2y^5-x^4y^5}{h}$

   b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3y^2\sin(x+h)^2+\tan(x+h)-3y^2\sin x^2-\tan^2 x}{h}$

   c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y\sin xz(\cos xh-1)+y\cos zx\sin xh}{h}$

2. Obtenga las derivadas parciales de las siguientes funciones

   a) $f(x,y)=(4x^2y^4-3x^2+8y^3)^3$

   b) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

   c) $f(x,y)=(2x+3y)^x+(2x+3y)^y$

   d) $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln^2(1+x^2+y^2)}$

   e) $f(x,y)=\arccos\sqrt{x^2+y^2}$

   f) $f(x,y,z)=\ln\dfrac{1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

   g) $f(x,y,z)=xy\sin z+xz\cos y+yz\tan x$

3. Sea $f(x_1,x_2\ldots,x_n)=\ln(x_1x_2\cdots x_n)$. Calcule

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(1,1,\ldots,1)$$

4. Sea $f(x,y)=3x^2y^4-12x^6+2xy^5$. Verifique que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=6f(x,y)$$

5. Si $z = \phi(x, y)$ es una función real de variable real, diferenciable en $\mathbb{R}$. Demuestre que la función dada satisface la expresión indicada.

   a) $f(x, y) = x^2\phi(x^2 y)$, $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2z$

   b) $f(x, y) = x^2\phi(3x + y^2)$, $\quad 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4yz$

   c) $f(x, y) = e^{x+y}\phi(xe^y)$, $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = z(x - 1)$

7.5. Derivadas direccionales

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in U$ con un punto dado de U. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en $\mathbf{x}_0$. En la dirección del vector $\mathbf{v}$ denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ o $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$, como el límite, [5], [17], [3].

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

Observaciones:

- El concepto de derivada direccional es un concepto que generaliza el de derivada parcial. En efecto, si $\mathbf{v} = e_i$=i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$,tenemos que, efectivamente $\|\mathbf{v}\| = \|e_i\| = 1$ y

  $$\frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + te_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

  la cual mide la variación de la función f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección del vector e_i.

- Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin theta)$

  $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(\cos\theta, \sin\theta)) - f(x_0, y_0)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t} \end{aligned}$$

  Si $\theta = \pi/2$, $\mathbf{v} = j = (0, 1)$, entonces

  $$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Ejemplo 7.5.1 *Sea* $f(x, y) = x^2 + y^2$*. Hallar* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y)$*, si* $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

Ejemplo 7.5.2 *Sea* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *. Calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0),\ \mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Ejemplo 7.5.3 *Sea* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & , \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *, sea* $\mathbf{v} = (a,b)$ *el vector unitario. Calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$.

7.5.1. Ejercicios propuestos

1. Calcule la derivada direccional de las siguientes funciones dadas en la dirección indicada.

   a) $f(x,y) = 3x - 2y,\ \mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ \mathbf{v} = (a,b)$, en el punto (0,0).

   c) $f(x,y,z) = z \sin y^3 \cos(x^5 + \tan y^3),\ \mathbf{v} = (0,0,1)$.

   d) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\ \mathbf{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

2. Verifique que la derivada direccional de la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\ \mathbf{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

   puede escribirse como

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

3. Sea $\mathbf{v} = (a,b)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que el plano perpendicular a $z = 0$, que pasa por x_0, y_0, para el que $\mathbf{v}$ es un vector paralelo (decimos que el plano está en la dirección del vector $\mathbf{v}$), se puede escribir como:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}$$

4. Demuestre que la curva de intersección de la superficie $z = f(x,y)$con el plano como el descrito en el ejercicio anterior es $z = f(x_0 + at, y_0 + bt)$.

7.6. Diferenciabilidad de funciones

Se dice que la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ si hay constantes A_1 y A_2 de modo que $f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1h_1 + A_2h_2 + r(h_1, h_2)$, donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

, [5], [17], [3].

Observaciones:

- Supongamos que la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in U$ poniendo $\mathbf{h} = (h_1, 0)$ podemos escribir

  $$\frac{r(h_1, 0)}{h_1} = \frac{r(h_1)}{h} = \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} - A_1$$

  Si tomamos límite $h_1 \to 0$ (i,e. cuando $h \to \bar{0}$) obtenemos

  $$\lim_{h_1\to 0} \frac{r(h_1)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{h_1} - A_1 \right) = 0$$

  de donde vemos que:

  $$A_1 = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

  Un argumento análogo (poniendo $h = (0, h_2)$) nos conduce a

  $$A_2 = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- Una condición necesaria para que una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in U$ es que exista sus derivadas parciales en ese punto. Sin embargo, tal condición está muy lejos de ser suficiente

Teorema 7.6.1 *Si la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in U$, entonces es continua en ese punto.*

Resolución:

- Siendo f diferenciable en $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ se tiene

  $$f((x_0, y_0) + (h_1 + h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1h_1 + A_2h_2 + r(h_1, h_2)$$

- Tomando el límite cuando $(h_1, h_2 \to \bar{0})$ y observando que la condición establecida en la definición para el residuo $r(h_1, h_2)$, se deduce que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} r(h_1, h_2) = 0$$

vemos que $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0)$

- Si $x = x_0 + h_1,\ y = y_0 + h_2$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

La cual significa precisamente que la función f es continua en (x_0, y_0)

■

Ejemplo 7.6.1 *Sea la función* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,'\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$. *Muestre que f no es diferenciable en* $\boldsymbol{p} = (0,0)$

Resolución.-

- $f((0,0) + (h_1, h_2)) = f(0,0) + 0h_1 + 0h_2 + r(h_1, h_2)$

$$r(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$$

- $\dfrac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = \dfrac{h_1 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}$

- $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|((h_1, h_2))\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}$

$$= \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{2^{3/2} h_1^3} = \lim_{h_1\to 0} \frac{1}{2^{3/2} h_1}\ \nexists$$

Ejemplo 7.6.2 *Sea la función* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. *Mostrar que no es diferenciable en el origen*

Resolución

- Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \pm\ \nexists$$

- Entonces, siendo la existencia de las derivadas parciales en el punto $\mathbf{p}$ una condición necesaria para la diferenciabilidad de la función en $\mathbf{p}$, concluimos que la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en el origen.

Teorema 7.6.2 *Sean $f,g:U\subseteq \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definidas en el conjunto abierto U y diferenciables en $\mathbf{p}\in U$. Entonces:*

a) $f+g:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (f+g)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})$ es una función diferenciable en $\mathbf{p}$.

b) $fg:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (fg)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})$ es una función diferenciable en $\mathbf{p}$.

c) Si $g(\mathbf{p})\neq 0,\ f/g:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (f/g)(\mathbf{p})=\frac{f(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p})}$ es diferenciable en $\mathbf{p}$.

Observación: Si descomponiendo la función $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable en el punto $\mathbf{p}=(x_0,y_0)$, con la función $g:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (donde I es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ que contiene el rango de f) diferenciable en $f(x_0,y_0)\in I$, entonces la composición $g_o f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, será diferenciable en $\mathbf{p}$.

Ejemplo 7.6.3 *La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ es diferenciable en todo el espacio $\mathbb{R}^2$, pues es la composición de la función $\varphi(x,y)=x^2+y^2$ que siempre es diferenciable con la función $\varphi(x)=e^{-x}$ que también lo es.*

Teorema 7.6.3 *Sean $f,g:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, diferenciables en $\mathbf{p}\in U$. Entonces:*

a) La suma $f+g:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (f+g)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})$ es una función diferenciable en $\mathbf{p}$.

b) El producto $fg:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (fg)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})$ es una función diferenciable en $\mathbf{p}$.

c) Si $g(\mathbf{p})\neq 0,\ f/g:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (f/g)(\mathbf{p})=\frac{f(\mathbf{p})}{g(\mathbf{p})}$ es diferenciable en $\mathbf{p}$.

Teorema 7.6.4 *Sea $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si las funciones (derivadas parciales)$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:\widetilde{U}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,n,\ \widetilde{U}\subseteq U$, son continuas en el punto $\mathbf{x}_0\in\widetilde{U}$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$*

7.6.1. Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los siguiente ejercicios, escriba la expresión del residuo de la definición de diferenciabilidad en el punto en cuestión. Además pruebe que la función es diferenciable.

   a) $f(x, y) = 5, \mathbf{p} = (x_0, y_0)$

   b) $f(x, y) = 4x^2y^3,\ \mathbf{p} = (1, 1)$

   c) $f(x, y) = x \sin y,\ \mathbf{p} = (0, 0)$

   d) $f(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + z^2,\ \mathbf{p} = (1, 0, 1)$

   e) $f(x, y, z) = e^{x+y+z},\ \mathbf{p} = (0, 0, 0)$

2. Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, diferenciables en $= (x_0, y_0) \in U$

   a) Demuestre que la función suma $f + g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ es una función diferenciable en $\mathbf{p}$.

   b) Demuestre que si $g(x_0, y_0) \neq 0$, la función cociente definida como la siguiente $\dfrac{f}{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ es diferenciable en $\mathbf{p}$.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = |x| + |y|$. ¿Qué aspecto tiene la gráfica de f?. Demuestre que esta función no es diferenciable en el origen. ¿En qué otros puntos no es diferenciable?

4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto Ude $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in U$. Suponga que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ no existe. Demuestre que f no es diferenciable en $\mathbf{p}$.

5. mostrar que la afirmación del teorema 7.6.4 e falsa. Es decir que el hecho de que la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in U$, no implica que las derivadas parciales de f sean continuas en $\mathbf{p}$. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Demuestre que las derivadas parciales de f son *discontinuas*en el origen, probando que el límite de ellas (x, y) tiene a $(0, 0)$ no existe.

b) Constate que el residuo de la definición de diferenciabilidad aplicada a f en el origen se ve como

$$r(h_1, h_2) = (h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

c) demuestre que

$$\lim_{h_1,h_2} \to (0,0) \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

y concluya que la función es diferenciable en el origen.

7.7. Diferenciabilidad y derivadas direccionales de una función varias variables

Sea la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, la definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ sea $\mathbf{x}_0 \in U$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ el vector (unitario) en cuya dirección queremos calcular la derivada de la función f en el punto $\mathbf{x}_0$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} h_i + r(\mathbf{h}), \quad \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Escribamos el vector $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ como $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$ (con t suficientemente pequeño para que $t\mathbf{v} \in U$) [5], [17], [3].

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(tv_i) + r(t\mathbf{v}) \\
\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)v_i + \frac{r(t\mathbf{v})}{t} \\
\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} - f(\mathbf{x}_0))}{t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)v_i \pm \lim_{h\to 0} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)v_i}$$

Ejemplo 7.7.1 *Consideremos la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x| + |y|$. *¿Qué aspecto tiene la gráfica de* f*?. Demuestre que esta función no es diferenciable en el origen ¿En que otros puntos no es diferenciable?.*

Resolución:

- $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \pm 1$
- $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \pm 1 \Rightarrow f$ no es diferenciable en el origen.
- No es diferenciable en el eje x, no se diferenciable en el eje y $(x,0)$, $(0,y)$.

Ejemplo 7.7.2 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0)$ un punto frontera de U. Demuestre que f no se diferenciable en $\boldsymbol{p}$.*

7.7.1. Ejercicios propuestos

1. Sea la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en U y sea $\mathbf{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo (no necesariamente de norma 1). Defina la derivada de $f$en la dirección de $\mathbf{u}$ (en un punto cualquiera $\mathbf{x} \in U$), denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$, como
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
Demuestre que:
   a) $\dfrac{\partial f}{\partial (c\mathbf{u})} = c\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ donde c es un número real no nulo.
   b) $\dfrac{\partial f}{\partial (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)} = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1} + \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}$ donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ (ambos no son nulos).
2. Calcule la derivada direccional de la función dada en la dirección del vector indicado, en los siguientes ejercicios:
   a) $f(x,y) = ax + by$, en un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, en la dirección del vector $\mathbf{u} = (2,3)$.
   b) $f(x,y) = x \sin y$, en l punto $\mathbf{p} = (1, \pi)$, en la dirección del vector $\mathbf{u} = (-2, 3)$
   c) $f(x,y,z) = x \ln y + y \ln z + z \ln x$, en el punto $\mathbf{p} = (1,1,1)$, en la dirección del vector $\mathbf{u} = (a,a,a)$ (a es un número positivo dado)

3. Demuestre que la derivada direccional de la función $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$en los puntos del círculo $x^2 + y^2 - 2y = 0$, en la dirección de la normal a este círculo, es igual a cero.

4. Calcule la derivada direccional de la función $f(x,y) = 5x^2y^3$ en el punto $\mathbf{p} = (1,1)$

   a) en la dirección del vector que va de $\mathbf{p}$ al punto $(3,-2)$

   b) en la dirección del vector que va de $\mathbf{p}$ al origen.

   c) en la dirección del vector tangente al círculo $x^2 + y^2 = 2$ en $\mathbf{p}$.

   d) en la dirección del vector $\mathbf{p}$

5. Sea la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un punto $\mathbf{p} \in U$. Compruebe que la derivada direccional de f en $\mathbf{p}$, en la dirección de (la tangente a) la curva de nivel que pasa por $\mathbf{p}$ (es decir, la curva $f(x,y) = f(\mathbf{p})$)es igual a cero.

   a) $f(x,y) = 3x - y,\ \mathbf{p} = (2,5)$

   b) $f(x,y) = \sin(x+y),\ \mathbf{p} = (0,0)$

   c) $f(x,y) = 5x^2 + 6y^2,\ \mathbf{p} = (-1,0)$

   d) $f(x,y) = e^x e^y,\ \mathbf{p} = (0,0)$

7.7.2. Gradiente de una función

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferencial definida definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se define el (vector) gradiente de la función f en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$, denota por grad $f(\mathbf{x}_0)$ o $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, como el vector de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right)$$

Con este concepto, la formula de la sección anterior, que nos da la derivada direccional de una función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{v} \in R^n$, se ve como

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} \tag{7.1}$$

(la derivada de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección de $\mathbf{v}$ es el producto punto del vector gradiente de f en $\mathbf{x}_0$ con el vector $\mathbf{v}$).

Ejemplo 7.7.3 *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ *determinar la* $\nabla f(1, 1, 1)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$

Resolución: La función $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ tiene por derivadas parciales a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z^4, \mathbf{q}\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z^4, \mathbf{q}\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2y^3z^3$$

En el punto $(1, 1, 1)$ estas derivadas son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = 2, \mathbf{q}\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 3, \mathbf{q}\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 4$$

Entonces, el vector gradiente de la función f en el punto $(1, 1, 1)$ es

$$\text{grad } f(1, 1, 1) = (2, 3, 4)$$

la derivada direccional de la función f en la dirección del vector unitario $\mathbf{v} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1, 1) &= \text{grad } f(1, 1, 1) \cdot \mathbf{v} = (2, 3, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Una de las cualidades importantes que tiene la formula 7.1 además de su simplicidad, es que permite descubrir algunos secretos importantes de las derivadas direccionales. En efecto, recordemos que

$$\mathbf{PR}_{\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \to \mathbf{v}} = (\text{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$$

Este hecho nos permite obtener la siguiente conclusión; el vector de la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ es máximo cuando el vector $\mathbf{v}$ está en la dirección del gradiente de f en $\mathbf{x}_0$ y nula cuando $\mathbf{v}$ es ortogonal a tal vector gradiente. Es decir, el vector grad $f(\mathbf{x}_0)$ nos dice en qué dirección se tiene la mayor variación (el mayor crecimiento) de la función f en el punto $\mathbf{x}_0$.

7.7.3. Derivada parcial de orden superior

En forma similar que las derivadas ordinarias , es posible hallar derivadas parciales de una función de varias variables de segundo, tercero y superiores , siempre y cuando tales derivadas existen por ejemplo:

1. Derivar dos veces con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D11$$

2. Derivar dos veces con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D22$$

3. Derivar primero con respecto a x y a continuación con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D12$$

4. Derivar primero con respecto a y y a continuación con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = D21$$

Ejemplo 7.7.4 *Probar que la función $f(x, y) = x^3y - xy^3$ es armónica*

Resolución:

$f(x, y) = x^3y - xy^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & = 3x^2 - y^3 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} & = x^3 - 3xy^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & = 6xy \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} & = -6xy \end{cases}$$

luego $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$

por lo tanto la función $f(x, y)$ es armónica

7.8. Regla de la cadena para derivar funciones compuestas

Teorema 7.8.1 (Regla De La Cadena) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por $z = f(u, v)$, donde f es una función diferenciable de u e v y*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ g(x, y) & = & (u(x, y), v(x, y)) \end{array}$$

si g es diferenciable en (x, y) *, entonces la derivada de la función compuesta*

$$h(x,y) = (f_0 g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(u(x,y), v(x,y))$$

en el punto (x, y) *es :*

$$[D(f_0 g)(\vec{x})] = [Df(g(\vec{x}))][Dg(\vec{x})]$$

$$[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}] = [\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}] * \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7.8.1 *aplicando la regla de la cadena , Hallar* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *si la función* $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy$ *tal que* $x = t^2$ *,* $y = 1 - t$

Resolución: mediante el diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & x \arrow[r] & t \\ f \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

y mediante la regla de cadena.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (2x + y)(2t) + (3y + x)(-1) \\ &= 2t(2x + y) + 3y - x \end{aligned}$$

Ejemplo 7.8.2 *Aplicando al regla d cadena , Hallar* $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ *y* $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ *si* $u = \dfrac{x - y}{1 + xy}$ *,* $x = \tan s$ *,* $y = \tan t$ *cuando* $s = \dfrac{\pi}{4}$*,* $t = \dfrac{\pi}{4}$

Resolución: mediante el diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & x \arrow[r] & s \\ u \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

y mediante la regla de cadena
$\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial s}$, donde $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-(1 + y^2)^2}{1 + xy}$, $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \sec^2 s$

cuando $s = t = \dfrac{\pi}{4}$, se tiene : $x = 1$, $y = 1$

luego $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ y $\dfrac{\partial x}{\partial s} = 2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = 1.2 = 2$$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial t}$, donde $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{-(1+x)^{2\,2}}{1+xy}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sec^2 z$

cuando $s = t = \dfrac{\pi}{4}$, se tiene : $x = 1$, $y = 1$

luego $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial t} = 2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}2 = -1$$

Teorema 7.8.2 (Regla de la cadena general) *Sea $f : D \subset I\!R^n \to I\!R$ es una función diferenciable en $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tal que $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y que cada x_i es un a función de m variable $y_1, y_2, \cdots, y_m$ es decir $x_i = x(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ $\forall i = 1, 2, \cdots n$*

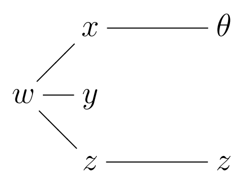
Supongamos que cada derivada parcial $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}$ existen entonces u es una función de $y_1, y_2, \cdots, y_m$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{\partial u}{\partial y_1} & = & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}.\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & + & \dfrac{\partial u}{\partial x_2}.\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial y_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\
\dfrac{\partial u}{\partial y_2} & = & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}.\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & + & \dfrac{\partial u}{\partial x_2}.\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial y_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \cdots & \vdots \\
\dfrac{\partial u}{\partial y_m} & = & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}.\dfrac{\partial x_1}{\partial y_m} & + & \dfrac{\partial u}{\partial x_2}.\dfrac{\partial x_2}{\partial y_m} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial y_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_m}
\end{array}$$

La demostración de este teorema es una extensión del teorema anterior

Ejemplo 7.8.3 *Si f es una función diferenciable de x e y además :*
$w = x^2 + y^2 + z$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$
Hallar $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial w}{\partial z}$

Resolución: El diagrama de árbol, de funciones compuestas es:



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= 2x(\cos\theta) + 2y.\operatorname{sen}\theta\\
&= 2r\cos^2\theta + 2r\operatorname{sen}^2\theta\\
&= 2r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta}\\
&= -2xr\operatorname{sen}\theta + 2yr\cos\theta\\
&= -2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial z},\frac{\partial z}{\partial z}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.8.4 *Hallar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *,* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *si* $z = f(x^2, x\operatorname{sen} y, x+y)$

Resolución: Si $z = f(x^2, x\operatorname{sen} y, x+y) = f(u, v, t)$
donde $u = x^2$, $y = x\operatorname{sen} y$, $t = x + y$

$$
\begin{array}{lll}
 & u & \text{———} \; x\\
z = f(u,v,t) & v & \\
 & t & \text{———} \; y
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\\
&= 2x\frac{\partial z}{\partial u} + \operatorname{sen} y\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}\\
&= 0.\frac{\partial z}{\partial u} + x\cos y\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t}\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x\cos y\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t}
\end{aligned}
$$

7.9. Aplicación de las derivadas direccionales y gradiente

7.9.1. Plano Tangente

Sea $S : f(x,y,z) = 0$ una superficie , el plano tangente de S en el punto $\mathbf{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ de S esta dado por

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{p}_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0}$$

Ejemplo 7.9.1 *Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = x^2+y^2$ *en el punto* $p(1,0,1)$

Resolución: como $\mathcal{P} : \nabla f(\mathbf{p}_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$
Datos: $\mathbf{p}_0 = (1,0,1) = (x_0,y_0,z_0)$
de la ecuación $z = x^2+y^2$ obtenemos

$$x^2+y^2-z = 0 = f(x,y,z)$$

luego :

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (2x, 2y, -1) \\ \nabla f(1,0,1) &= (2,0,-1) \\ \text{entonces } \mathbf{q}\mathcal{P} : \nabla f(1,0,1).(x-1, y-0, z-1) &= 0 \\ (2,0,-1)(x-1,y,z-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{P} : 2x - z - 2 = 0$$

Ejemplo 7.9.2 *escriba las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie* $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ *en el punto* $p(3,4,-7)$

Resolución: como $\mathcal{P} : \nabla f(\mathbf{p}_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$
Datos: $\mathbf{p}_0 = (3,4,-7) = (x_0,y_0,z_0)$
de la ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ obtenemos

$$\sqrt{x^2+y^2} - xy - z = 0 = f(x,y,z)$$

luego :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y,z) &= (\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x, 1) \\
\nabla f(3,4,-7) &= (\frac{17}{5}, \frac{11}{5}, 1) \\
\text{entonces } \mathbf{q}\mathcal{P} : \nabla f(3,4,-7).(x-3, y-4, z+7) &= 0 \\
(2,0,-1)(x-1,y,z-1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{P} : 17x + 11y + 5z = 14$$

7.9.2. Recta normal

La recta normal a la superficie $S : F(x,y,z) = 0$ en el punto $\mathbf{p}_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ es la recta que pasa a través de $\mathbf{p}_0$ y sigue la dirección del vector normal y su ecuación simétrica de la recta normal a S en $p_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\boxed{\mathcal{L} : \frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{f_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

Ejemplo 7.9.3 *Hallar la recta normal en el ejemplo anterior 01 de anterior*

Resolución:

$$p_0(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$$

$$f_x(1,0,1) = 1$$

$$f_y(1,0,1) = 0$$

$$f_z(1,0,1) = -1$$

$$\mathcal{L} : \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\mathcal{L} : \frac{x-1}{2} = z - 1 \wedge y = 0$$

$$\text{ó} \quad \mathcal{L} : (1,0,1) + t(2,0,-1) \; t \in \mathbb{R}$$

7.9.3. El Gradiente como dirección de máxima variación

Teorema 7.9.1 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que posee derivadas parciales de primer orden continua.*
entonces en cada punto p para el cual $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, el vector ∇f apunta una dirección en que f crece más rápidamente la magnitud del vector ∇f es tasa máxima de crecimiento de f

Observaciones:

$$D_{\vec{\mu}}f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}).\vec{\mu}$$

$$\begin{aligned}
D_{\vec{\mu}}f(\mathbf{p}) &= \frac{d}{dh}(f(\mathbf{p}+h\vec{\mu})) \\
&= \frac{d}{dh}(f(\underbrace{x_0+h\mu_1}_{x}, \underbrace{y_0+h\mu_2}_{y}, \underbrace{z_0+h\mu_3}_{z})) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dh} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dh} \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \\
&= \nabla f(\mathbf{p}).\vec{\mu}
\end{aligned}$$

prueba

$$\begin{aligned}
\text{como } \mathbf{q}D_{\vec{\mu}}f(\mathbf{p}) &= \nabla f(\mathbf{p}).\vec{\mu} \\
\text{pero } \mathbf{q}\nabla f(\mathbf{p}), \vec{\mu} &= |\nabla f(\mathbf{p})||\vec{\mu}|\cos\theta \\
&= |\nabla f(\mathbf{p})|\cos\theta \quad \text{pues} \quad |\vec{\mu}| = 1
\end{aligned}$$

es máximo valor se obtiene cuando $\theta = 0$ esto es , cuando elegimos $\vec{\mu}$ en la misma dirección valor máximo de $D_{\vec{\mu}}f(\mathbf{p}) = |\nabla f(\mathbf{p})|$

Ejemplo 7.9.4 *La derivada direccional de una función $z = f(x, y)$ en el punto $\boldsymbol{p}_0(1, 2)$, en la dirección hacia $\boldsymbol{p}_1(2, 3)$ es $2\sqrt{2}$, y en la dirección hacia $\boldsymbol{p}_2(1, 0)$ es -3 calcular la derivada direccional en $\boldsymbol{p}_0(1, 2)$, en la dirección hacia $\boldsymbol{p}_3(4, 6)$*

Resolución:

$$D_{\vec{\mu_1}}f(1, 2) = 2\sqrt{2}$$

$$D_{\vec{\mu_2}}f(1, 2) = -3$$

$$D_{\vec{\mu_3}}f(1, 2) = ????$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mu_1} &= \frac{\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}}{\|\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
\vec{\mu_2} &= \frac{\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}}{\|\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}\|} = \frac{(0,-2)}{2} = (0, -1) \\
\vec{\mu_3} &= \frac{\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_3}}{\|\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_3}\|} = \frac{(3,4)}{5} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})
\end{aligned}$$

como $D_{\vec{\mu}}f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{\mu}$, $\nabla f(1,2) = (a,b)$

$$\begin{aligned} D_{\vec{\mu_1}}f(1,2) &= \nabla f(1,2).\vec{\mu_1} = (a,b)(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$a + b = 4 \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{\mu_2}}f(1,2) &= \nabla f(1,2).\vec{\mu_2} = (a,b)(0,-1) \\ &= -b = -3 \end{aligned}$$

$$b = 3 \tag{7.3}$$

de la ecuación (7.2) y (7.3) tenemos $a = 1$

$$\begin{aligned} D_{\vec{\mu_3}}f(1,2) &= \nabla f(1,2).\vec{\mu_3} \\ &= (1,3)(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \\ \therefore D_{\vec{\mu_3}}f(1,2) &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.9.5 *La temperatura en el punto (x,y,z) está dado por $T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ donde T se mide en grados calcios y x,y,z se mide en metros.*
En que dirección aumenta más rápidamente la temperatura en $\boldsymbol{p}_0 = (2,-1,2)$ y cuál es la máxima razón de aumento de T en p

Resolución:

1. La temperatura aumenta más rápidamente en $\mathbf{p}_0$ en la dirección del gradiente $\nabla T(\mathbf{p}_0)$

$$\begin{aligned} \nabla T(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial z}\right) \\ &= 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}(-2x,-6y,-18z) \\ \nabla T(\mathbf{p}_0) &= -400e^{-43}(2,-3,18) \end{aligned}$$

2. La maxima razón de aumento de T en p

$$\|\nabla T(\mathbf{p}_0)\| = 400e^{-43}\sqrt{4+9+18^2} = 400\sqrt{337}e^{-43}$$

7.10. Valores extremos de una función de dos variables

Para establecer la condición necesaria y suficiente para que tenga extremos una función $f(x,y)$ de dos variables , a lo largo de la exposición se supone que la primera y la segunda derivada parcial de $f(x,y)$ son continuas en cad (x,y)

Teorema 7.10.1 *Una condición necesaria par que* (x_0,y_0) *se un punto extremo de* $f(x,y)$ *(punto crítico o estacionario) es que* $\nabla f(x_0,y_0)=0$

Teorema 7.10.2 *Una condición suficiente para que un punto estacionario ó critico* (x_0,y_0) *se extremo es que :*

$$\triangle = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0,y_0) - f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2$$

1. $\triangle > 0$ *y* $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ *, entonces* $f(x_0,y_0)$ *es un valor mínimo relativo* $\triangle > 0$ *y* $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ *, entonces* $f(x_0,y_0)$ *es un valor máximo relativo* $\triangle < 0$ *, entonces* $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ *es un punto silla*

2. $\triangle = 0$ *entonces no podemos tener ninguna conclusión*

Ejemplo 7.10.1 *Determinar los valores extremos relativos de la función* $f(x,y) = x^2 - y^3$ *si existe*

Resolución:

1. Condición necesaria de $f(x,y)$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \vec{0} \\ \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right) &= (0,0) \\ (2x,-3y^2) &= (0,0) \end{aligned}$$

es el único punto critico

2. Condición suficiente

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{yy} &= -6y \\ f_{zy} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\triangle = (f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2)(0,0) = 0$$

entonces no podemos tener ninguna información

Ejemplo 7.10.2 *Hallar las dimensiones de una caja rectangular (cerrada) de máximo volumen cuya superficie total es Am^2*

Resolución: Sea x, y, z las dimensiones de la caja
entonces $V = xyz$ el area total de la caja es:

$$\begin{aligned} A &= 2xy + 2xz + 2yz \\ z &= \frac{A - 2xy}{2x + 2y} \\ V &= xy\left(\frac{A - 2xy}{2x + 2y}\right) \; x > 0 \; , \; y > 0 \; , \; z > 0 \end{aligned}$$

el cual se desea máximo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{y^2(2A - 8xy - 4x^2)}{(2x + xy)^2} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{x^2(2A - 8xy - 4y^2)}{(2x + xy)^2} = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo se tiene

$$x = \sqrt{\frac{a}{6}} \; , \; y = \sqrt{\frac{a}{6}} \; , \; z = \sqrt{\frac{a}{6}}$$

Son las dimensiones máximas de la caja

7.10.1. Ejercicios propuestos

1. Determinar la Gradiente de la función dada

a) $f(x,y) = 3z\ln(x+y)$

b) $h(x,y) = e^y \tan 2x$

2. Si $\phi(x,y,z) = 3x^2 - y$ hallar $\nabla\phi(1,-1,1)$

3. Siendo $\phi(x,y,z) = 2xz^4 - x^4y$ hallar $\|\nabla\phi\|$ en el punto $(2,-2,-1)$

4. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2 = 17$ en el punto $(2,-2,3)$

5. Obtener las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie $x^2 = 12y$ en el punto $(6,3,3)$

6. Hallar $\nabla\varphi$ Siendo $\varphi = (x^2+y^2+z^2)e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

7. Hallar la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la recta normal a la superficie $y = e^x \cos z$ en $P(1,e,0)$

8. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   a) ¿En qué dirección unitaria es igual a cero la direccional en el punto $(1,1)$?

   b) ¿En qué dirección unitaria es igual a cero la derivada direccional en el punto arbitraria (x_0,y_0) en el primer cuadrante?

9. Sea $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3x-y}}{1+x^2}$ Hallar las derivadas direccionales unitarias $\mu = (\mu_1,\mu_2)$ en los cuales existe $D_{\vec{\mu}}f(p), \quad p \in \ker(f)$

10. Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad, está dado por $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1,2)$.

    a) ¿ En qué dirección deberá moverse el insecto para que se aleje lo más rápido posible de la toxicidad?

    b) En la curva de nivel apropiada, ubique y dibuje el vector gradiente $\nabla T(-1,2)$

    c) ¿ Cuál es la razón de cambio de la toxicidad del ambiente en que el punto $(-1,2)$ en la dirección $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$?

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) - \arctan(x^2)$. En el punto $(1,1)$, calcular el valor de la derivada direccional máxima de f y encontrar la dirección en la cual alcanza este valor máximo.

12. La temperatura T en una esfera de metal sólida es inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera el cual se considera que es el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es $120°C$.

    a) Encontrar la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$

    b) Demostrar que en cualquier punto de la esfera la dirección de máximo aumento de la temperatura está dada por un vector que apunta hacia el origen.

13. El capitán Ralph tiene dificultades acerca del lado soleado de mercurio. La temperatura del casco de la nave cuando él está en la posición (x, y, z) estará dada $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ donde x, y, z está medida en metros. Actualmente está en $(1, 1, 1)$.

    a) ¿ En que dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?

    b) Si la nave viaja a $e^8\, m$ por segundo ¿ con qué rapidez decrecerá la temperatura?

    c) Si se dirige hacia el punto $(1, 2, 1)$ ¿Cuál será la razón de cambio de la temperatura del casco?

14. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2 + y^2}$

    a) Si $f(x, y)$ es una colina. Hallar la dirección de máximo crecimiento si se parte del punto $(2, 1, 4/3)$

    b) Una persona camina sobre la colina partiendo del punto $(2, 1, 4/3)$ en dirección al punto $(3, 2, 3/2)$. Hallar la razón cambio instantáneo de la temperatura del medio ambiente dado por $T(x, y, z) = 4 + 2x^2 + y + z^3$ en el punto $(2, 1, 4/3)$

15. Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) \neq 0$, demostrar que la mayor derivada direccional de f en x_0 tiene lugar en la dirección $\nabla f(x_0)$ y su valor es $\|\nabla f(x_0)\|$

16. Una abeja está volando desde un foco caliente que se encuentra en el origen, en una trayectoria que describe una curva C, de tal manera, que el vector posición (0 posición de la abeja) en el instante t es: $f(t) = (t\cos\pi t, t\operatorname{sen}\pi t, t),\ t \in \mathbb{R}^+$

    a) Determinar la posición de la abeja en el instante $t = 1$ y el vector tangente a C en ese punto.

    b) La temperatura T en grados Celcius en (x, y, z) es $T(x, y, z) = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2}$. Hallar la razón de cambio de la temperatura si la abeja decide seguir en dirección del vector tangente a la curva.

17. Una hormiga se encuentra en el punto $(1, 1, 0)$ del paraboloide hiperbólico $S:\ z = y^2 - x^2$, ¿En cuál sentido del plano XY debe moverse para seguir la cuesta más empinada?

18. Sea $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1 + t^2}dt$

    a) Hallar la derivada direccional máxima de f en $(1, 1)$ y la dirección en que se alcanza este valor.

    b) Hallar todos los vectores unitarios $\vec{\mu}$ tales que $D_{\vec{\mu}}f(1, 1) = 0$

19. Sea $z = f(x, y)$ un a función diferenciable en $(1, -1)$ y $g(t) = (5t + 1, 2t - 1)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$ sabiendo que $\dfrac{\partial}{\partial t}(f \circ g)(0) = -10$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 5$

20. Demostrar que la función $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ satisface la ecuación:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

21. Demostrar que la función $z = xy + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisface la ecuación:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

22. Sea $z = f(x, y)$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$. Si $x = e^v\operatorname{sen}u$, $y = e^v\cos u$. Demostrar que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} = xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + (y^2 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

23. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en la variable u. Si $u = x^2 + y^2$, demostrar que $z = x + y + f(x^2 + y^2)$ cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 - y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

24. Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función C^2 en $\mathbb{R}^3$ y $w = f(x, y, z)$ satisface la ecuación (en coordenadas rectangulares)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + z\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{7.4}$$

Usando coordenadas cilíndricas, probar que la función (en coordenadas cilíndricas), satisface la ecuación siguiente:

$$\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} + r\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{7.5}$$

considere cada x, y, z como función de r, θ,z

7.11. Función implícitas

Hay tres versiones de derivar una función que está definido implícitamente en esta sección.

Teorema 7.11.1 (Primera Versión) *Sea la función $z = F(x, y)$ y (x_0, y_0) un punto de $\mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Supongamos que la función F tiene derivadas parciales en alguna bola. $B_r((x_0, y_0)) = \{(x, y) \;/\; \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$ de centro en (x_0, y_0) y radio $r > 0$ y que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.*
Entonces $F(x, y) = 0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así la función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad de x_0, tal que $y_0 = f(x_0)$, la cual tiene derivadas continuas en $V_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x - x_0| < r\}$ que pueden calcularse como

$$y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} \quad , \quad x \in V_r(x_0)$$

Ejemplo 7.11.1 *Dado la ecuación $e^{2x+y} + \operatorname{sen}(y^2 + x) - 1 = 0$ Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto* $(0, 0)$

Resolución:

Se tiene la siguiente función $F(x,y) = e^{2x+y} + \operatorname{sen}(y^2 + x) - 1$
donde $F(x,y) = 0$
Además $\dfrac{\partial F}{\partial y} = e^{2x+y} + 2y\cos(y^2 + x)$, donde $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$ Por el teorema 7.11.1, afirmamos dos cosas:

1. En un entorno de $x_0 = 0$, existe una función $y = f(x)$ definida implícitamente por $F(x,y) = 0$. Sin embargo, el teorema nada dice de cómo se determina tal función (nos dice que $F(x,y) = 0$ puede resolverse para y en términos de x, pero no nos dice cómo hacer el despeje)

2. Pese, que el teorema no nos diga cómo establecer explícitamente la función $y = f(x)$, nos dice cómo hallar su derivada mediante la fórmula: $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$
Así obtenemos: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2e^{2x+y} + \cos(y^2 + x)}{e^{2x+y} + 2y\cos(y^2 + x)}$ entonces $\dfrac{dy}{dx}(0,0) = -\dfrac{3}{1} = -3$

Teorema 7.11.2 (Segunda Versión) *Sea la función $z = F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ que cumple las siguientes hipótesis:*

h1. *Sea $p = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n, \bar{y}) \in I\!R^{n+1}$ un punto tal que $f(p) = 0$*

h2. *Supongamos que la función F tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continuas el alguna bola $B_\varepsilon(p)$ y que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$*

Tesis: *Entonces la ecuación $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ puede resolverse para y en términos de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y definir así una función $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dentro de la vecindad $V_\varepsilon((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n, \bar{y}))$ y que se pueden calcular con las formulas:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V_\varepsilon$$

Ejemplo 7.11.2 *dada la ecuación $z + z^y = x$, una solución es $(4,1,2)$ ¿es cierto que cerca de $(4,1)$, z es función de las otras variables x, y? ¿Cuál seria la derivada de esta función implícita?*

Resolución: Es una aplicación de la teorema 7.11.2 :
Las hipótesis son:

h1. En la función $F(x,y,z) = z + z^y - x$ se cumple $F(4,1,2) = 2 + 2^1 - 4 = 0$

h2. $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 + yz^{y-1}$, tal que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(4,1,2) = 1 + 1(2)^{1-1} = 2 \neq 0$

Entonces las afirmamos dos tesis:

1. Porque $\dfrac{\partial F}{\partial z}(4,1,2) \neq 0$, existe la función $z = f(x,y)$ en forma implícita en un disco de centro $(4,1)$ y radio r

2. Las derivadas parciales de la función implícita $z = f(x,y)$ en el punto $(4,1)$, son:

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{-1}{1+yz^{y-1}}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(4,1) = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

   b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{z^y \ln z}{1+yz^{y-1}}$ en $(4,1,2)$ es:

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2^1 \ln 2}{2} = -\ln 2$

Teorema 7.11.3 (Tercera Versión) *Dadas las funciones $z_1 = F(x,y,\mu,\nu)$, además $z_2 = G(x,y,\mu,\nu)$ establecemos las siguientes hipótesis*

h1. Sea $p = (\bar{x},\bar{y},\bar{\mu},\bar{\nu}) \in I\!R^4$ un punto tal que $F(p) = 0$, $G(p) = 0$

h2. Supongamos que las funciones F y G tienen derivadas parciales continuas en una bola $B_\epsilon((\bar{x},\bar{y},\bar{\mu},\bar{\nu})) \subset I\!R4$

h3. El jacobiano $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,\nu)}(p) \neq 0$

Tesis:

a) *Entonces, existen las funciones (implícitas) $\mu = f(x,y)$, $\nu = g(x,y)$ tal que $F(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0$, $G(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0$ en una vecindad V de $(\bar{x},\bar{y})$.*

b) *Existen las derivadas parciales de las funciones implícitas $\mu = f(x,y)$, $\nu = f(x,y)$ que son continuas en V. Dichas derivadas parciales están dadas por:*

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\nu)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,\nu)}} \quad , \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,\nu)}}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,\nu)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,\nu)}} \quad , \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,\nu)}}$$

Ejemplo 7.11.3 *Dado el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x^2+y^3+z^3=2 \\ xy+z=1 \end{cases}$ *está claro que el punto* $(0,1,1)$ *es una solución. Cerca de dicho punto, y para las soluciones del sistema, ¿es* x *función de* (y,z)*? ¿ es* y *función de* (x,z)*? ¿es* z *función de* (x,y)*? ¿porqué?*

Resolución:

En primer lugar, analicemos para cada caso, si los datos del problema satisfacen las hipótesis del teorema 7.11.3

Se tiene las funciones:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= x^2+y^3+z^3-2 \\ G(x,y,z) &= xy+z-1 \end{aligned}$$

Donde:

h1. $F(0,1,1)=0$, $G(0,1,1)=0$, $P=(x,y,z)=(0,1,1)$

h2. Las funciones F, G tienen derivadas continuas en la bola $B_\varepsilon(0,1,1)\subset \mathbb{R}^3$. Dichas derivadas parciales, son:

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x \quad , & \dfrac{\partial F}{\partial x}(P)=0 & \dfrac{\partial G}{\partial x}=y \quad , & \dfrac{\partial G}{\partial x}(P)=1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y^2 \quad , & \dfrac{\partial F}{\partial y}(P)=3 & \dfrac{\partial G}{\partial y}=x \quad , & \dfrac{\partial G}{\partial y}(P)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z^2 \quad , & \dfrac{\partial F}{\partial z}(P)=3 & \dfrac{\partial G}{\partial z}=1 \quad , & \dfrac{\partial G}{\partial z}(P)=1 \end{array}$$

h3. Aquí hay 3 preguntas que responder:

a) ¿es x función de (y,z) cerca de $(0,1,1)$? Esto es, $x=f(y,z)$ La respuesta es afirmativa, si el Jacobiano $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ en el punto $(0,1,1)$ es diferente de cero. veamos:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Porque el Jacobiano es diferente de cero, afirmamos que x es función de (y,z)

b) ¿es y función de (x, z) cerca de $(0,1,1)$? Esto es, $y = g(x, z)$ La respuesta es afirmativa, si el Jacobiano $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ en el punto $(0,1,1)$ es diferente de cero. veamos:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Porque el Jacobiano es diferente de cero, afirmamos que y es función de (x, z)

c) ¿es z función de (x, y) cerca de $(0,1,1)$? Esto es, $z = f(x, y)$ La respuesta es afirmativa, si el Jacobiano $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ en el punto $(0,1,1)$ es diferente de cero. veamos:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Porque el Jacobiano es diferente de cero, afirmamos que z es función de (x, y)

Capítulo 8

Integrales multiples y sus aplicaciones

Pre-Requisitos.- Para la compresión adecuada de éste capítulo de las integrales múltiples se requiere del conocimiento previo de:

- Métodos de integración.
- Geometría analítica.
- Superficies.
- Coordenadas polares

Objetivos.-

- Utilizar las integrales dobles en el cálculo de áreas, volumen, centro de masa, etc.
- Mostrar las integrales dobles en coordenadas polares y emplear los jacobianos.
- Utilizar las integrales triples en el cálculo de volumen de solidos, centro de masa y momento de inercia de solido.
- Mostrar las integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

8.1. Integrales dobles en diferentes sistemas de coordenadas

8.1.1. Integrales dobles sobre rectángulos

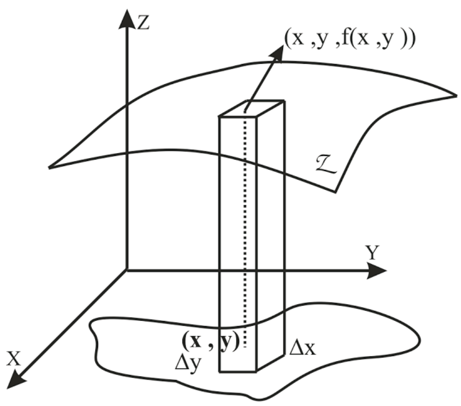
Definición 8.1 *Se dice que una función f de dos variables $(f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$, es integrable sobre la rectangular D, si f esta definido en D y existe el numero real*

$$L = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A(r_i)$$

este numero L se llama integral doble de f en $\mathbb{R}$ y escribimos

$$\boxed{V(s) = L = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A(r_i) = \iint_D f(x, y) dA}$$

Interpretación geométrica de la integral doble



Propiedades fundamentales de la integral doble

1. Si la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en la región cerrado D, entonces f es integrable en D

2. Si la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable en la región cerrada D y $k \in \mathbb{R}$, entonces kf es integrable en Dy

$$\iint_D kf(x, y) dA = k \iint_D f(x, y) dA$$

3. Si la función $g, f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son integrable en la región cerrada D , entonces $f \pm g$ es integrable en Dy

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA \pm \iint_D g(x,y)dA$$

4. Si la función $g, f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son integrable en la región cerrada D ,$f(x,y) \geq g(x,y) \;\forall\; (x,y) \in D$ entonces

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

5. Si la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es continua en la región cerrada $D = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 región cerrada disjuntas,entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

8.1.2. Calculo de integrales dobles por medio de integrales iteradas

1º Caso

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una función continua sobre D, donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; a \leq x \leq b \; , \; c \leq y \leq d\}$$

es un rectángulo ver figura 8.1

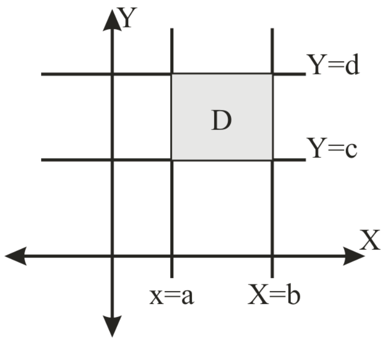


Figura 8.1:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy \\ &= \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\end{aligned}$$

Se llama integral iterada de f

Ejemplo 8.1.1 *evaluar la integral doble* $\iint_D(2x^3-y)dxdy$ *si* D *es la región que consta de todo los puntos* (x,y) *para los cuales* $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$

Solución:

$$\begin{aligned}\iint_D(2x^3-y)dxdy &= \int_0^2\int_0^1(2x^3-y)dxdy \\ &= \int_0^2(\frac{2x^4}{4}-yx)\mid_0^1 dy \\ &= \int_0^2[\frac{1^4}{2}-y(\frac{0}{y.0})]dy \\ &= \int_0^2(\frac{1}{2}-y)dy \\ &= \frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\mid_0^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.2 *Calcular la integral doble* $\iint_D e^{x+y}dxdy$*, donde* D *es la región* $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x+y}dxdy &= \int_0^1\int_0^1 e^{x+y}dxdy \\
&= \int_0^1 e^{x+y} \mid_0^1 dy \\
&= \int_0^1 (e^{1+y} - e^y)dy \\
&= (e^{1+y} - e^y) \mid_0^1 \\
&= (e-1)^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.3 *calcular la integral sobre* $\iint_D e^{x+\operatorname{sen} y}\cos dxdy$, *si la región* D *es el rectángulo* $0 \leq x \leq \pi$ $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

Solución:

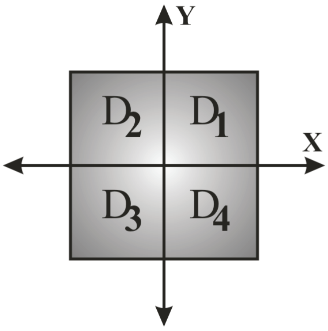
$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x+\operatorname{sen} y}\cos dxdy &= c \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y e^{x+y} \mid_0^{\pi} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y e^{\pi+\operatorname{sen} y} - \cos y e^{\operatorname{sen} y})dy
\end{aligned}$$

si hacemos el siguiente cambio

$$\begin{aligned}
u = \pi \operatorname{sen} y \quad &, \quad v = \operatorname{sen} y \\
du = \cos y dy \quad &, \quad dv = \cos dy \\
\rightsquigarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y e^{x+y} &= \int_{\pi}^{\pi+1} e^u du + \int_0^1 e^v dv \\
&= e \mid_{\pi}^{\pi+1} + e^v \mid_0^1 \\
\therefore \iint_D e^{x+\operatorname{sen} y}\cos dxdy &= (e-1)(e^{\pi}-1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.4 *calcular la integral doble* $\iint_D (|x|+|y|)dxdy$ *donde* $D : [-1,1]x[-1,1]$

Solución: sabemos que:



$$|x|+|y| = \begin{cases} x+y & \text{si } x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \\ x-y & \text{si } x \geq 0\ ,\ y \leq 0 \\ -x+y & \text{si } x \leq 0\ ,\ y \geq 0 \\ -x-y & \text{si } x \leq 0\ ,\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (|x|+|y|)dxdy &= \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy + \int_0^1\int_{-1}^0 (-x+y)dxdy + \\
&\quad \int_{-1}^0\int_{-1}^0 (-x-y)dxdy + \int_{-1}^0\int_0^1 (x-y)dxdy \\
&= \int_0^1 (\frac{x^2}{2} + xy) \mid_0^1 dy + \int_0^1 (\frac{-x^2}{2} + xy) \mid_{-1}^0 dy + \\
&\quad \int_{-1}^0 (\frac{-x^2}{2} - xy) \mid_{-1}^0 dy + \int_{-1}^0 (\frac{x^2}{2} - xy) \mid_0^1 dy \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{2} + y)dy + \int_0^1 (\frac{1}{2} + y)dy + \\
&\quad \int_{-1}^0 (\frac{1}{2} - y)dy + \int_{-1}^0 (\frac{1}{2} - y)dy \\
&= (\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}) \mid_0^1 + (\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}) \mid_0^1 + (\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}) \mid_{-1}^0 + (\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}) \mid_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
\therefore \iint_D (|x|+|y|)dxdy &= 4
\end{aligned}$$

2º Caso

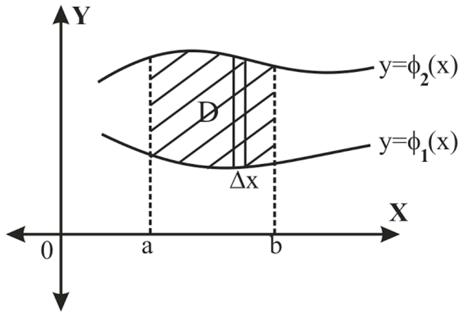
Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una función continua sobre D, donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leq x \leq\ b \wedge \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

es una región cerrada en $\mathbb{R}^2$ y ϕ_1 , $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $[a, b]$, tal que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)\ \forall x \in [a, b]$

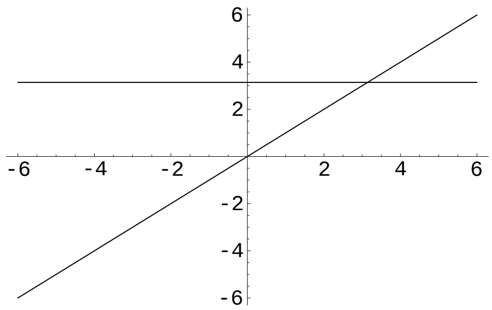
La integral iterada de f sobre D es :

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dydx}$$



Ejemplo 8.1.5 *Calcular la integral doble* $\iint_D \cos(x+y)dxdy$*, donde* D *es la región limitada por las rectas* $y = x$ *,*$x = \pi$ *y el eje* x

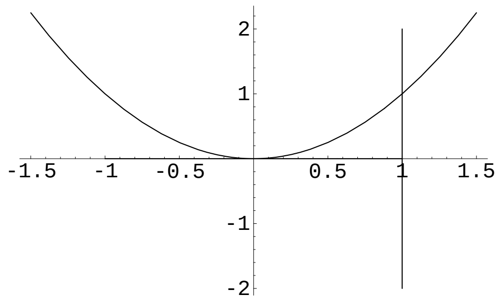
Solución:



$$
\begin{aligned}
\iint_D \cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\pi}\int_0^{x} \cos(x+y)dxdy \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+y)\mid_0^x dx \\
&= \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen} x)dx \\
&= (\frac{-1}{2}\cos 2x + \cos x)\mid_0^{\pi} \\
&= \frac{-1}{2}\cos 2\pi + \cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0 \\
\therefore \iint_D \cos(x+y)dxdy &= -2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.1.6 *Calcular* $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ *, donde* D *esta limitado por la recta* $x = 1$ *,* $y = 0$ *y la parabola* $y = x^2$

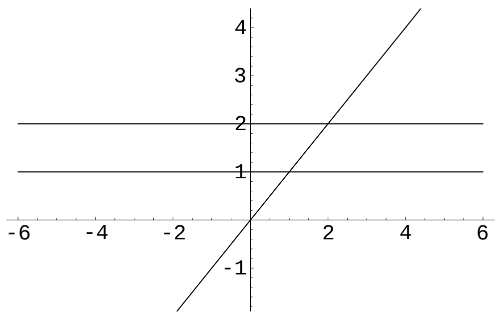
Solución:



$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dxdy\\ &= \int_0^1 (x^2y+\frac{y^3}{3})\mid_0^{x^2}dx\\ &= \int_0^1 (x^4+\frac{x^6}{3})dx\\ &= (\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21})\mid_0^1\\ &= \frac{26}{205}\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.7 *Calcular la integral doble* $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$*, si la región* D *esta limitada por las líneas* $y = x$*,* $x = 0$ *,*$y = 1$*,* $y = 2$

Solución:



traficando la región D y calculando los puntos de intersección

$$\begin{cases} y = x & \Rightarrow x = 2\\ y = 2,\ y = 1 & \Rightarrow x = 1\end{cases}$$

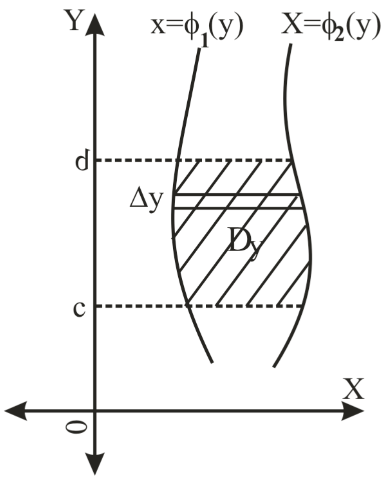
luego:
$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2)dxdy\\ &= \int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)dydx + \int_1^2\int_x^2 (x^2+y^2)dydx\\ &= \int_0^1 (x^2y+\frac{y^3}{3})\mid_1^2 dx + \int_1^2 (x^2y+\frac{y^3}{3})\mid_x^2 dx\\ &= \int_0^1 (2x^2+\frac{8}{3}-x^2+\frac{1}{3})dx + \int_1^2 (2x^2+\frac{8}{3}-x^3+\frac{x^3}{3})dx\\ &= (\frac{x^3}{3}+\frac{7x}{3})\mid_0^1 + (\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^3}{3}+\frac{8x}{3})\mid_1^2\\ \therefore \iint_D (x^2+y^2)dxdy &= 5\end{aligned}$$

3º Caso

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una función continua sobre D, donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ c \le y \le \ d \wedge \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$$

es una región cerrada en $\mathbb{R}^2$ y ϕ_1 , $\phi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $[c,d]$, tal que $\phi_1(y) \le \phi_2(y)$ $\forall y \in [c,d]$



La integral iterada de f sobre D es :

$$\boxed{\iint_D = \int_c^d\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dxdy}$$

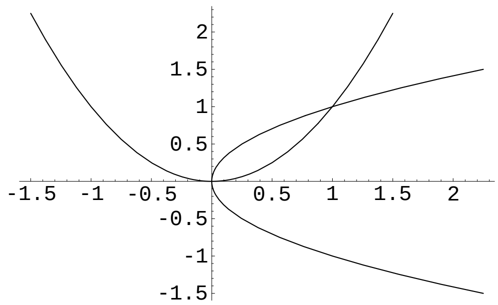
Ejemplo 8.1.8 *calcular la integral del ejemplo 03 ,en la cual el orden de integración sea inverso al ejemplo 04*

Solución: traficando nuevamente la región D luego:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_1^2\int_0^y (x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_1^2 (\frac{x^3}{3}+xy^2)\mid_0^y dy \\
&= \int_1^2 (\frac{y^3}{3}+y^3)dy \\
&= (\frac{4y^4}{3.4})\mid_1^2 \\
\therefore \iint_D (x^2+y^2)dxdy &= 5
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.9 *calcular la integral* $\iint_D dxdy$, *D es la región limitada por la parabola* $y=x^2$, $y^2=x$

Solución:



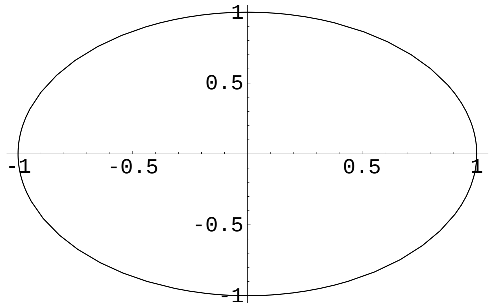
traficando la región D y calculando los puntos de intersección

$$\begin{cases} y=x^2 & y=0 \\ y^2=x & y=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dxdy \\
&= \int_0^1 x\mid_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (\sqrt{y}-y^2)dy \\
&= (\frac{2}{3}y^{3/2}-\frac{y^2}{3})\mid_0^1 \\
\therefore \iint_D dxdy &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.10 *encuentre* $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, *D limitada por una circunferencia de radio 1 y centro en origen*

Solución:



traficando la región D

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2}$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \cdots (\beta)$$

calculando $I = \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx$
por sustitución trigonométrica tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-y^2}\operatorname{sen}\theta &= x \\ \sqrt{1-y^2}\cos\theta d\theta &= dx \\ \sqrt{1-y^2}\cos\theta &= \sqrt{1-y^2-x^2} \end{aligned}$$

cambiando los limites de integración se tiene.

$$\text{si } x = -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \sqrt{1-y^2}\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{si } x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \sqrt{1-y^2}\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

luego:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-y^2}\cos\theta\sqrt{1-y^2}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{(1-y^2)}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)d\theta \\ &= (\frac{1-y^2}{2})(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}\pi}{2}) \\ &= \frac{\pi(1-y^2)}{2}\cdots(\alpha) \end{aligned}$$

finalmente sustituyendo (α) en (β)

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= \int_{-1}^{1}\frac{\pi(1-y^2)}{2}dy\\ &= \frac{\pi}{2}(y-\frac{y^3}{3})\mid_{-1}^{1}\\ \therefore \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

8.1.3. Calculo de areas y volúmenes por integrales dobles

Consideremos la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua sobre la región D. El volumen del sólido S bajo la superficie $z = f(x, y)$, que tiene como base la región D es dado por la expresión:

$$\boxed{V(s) = \iint_D f(x,y)dA}$$

y el área de la región D esta dado por:

$$\boxed{A(D) = \iint_D 1dA = \iint_D dxdy}$$

Ejemplo 8.1.11 *Hallar el area por integración doble de la región limitada por la parabola $y = x^2$, $y^2 = x$*

Solución: entonces

$$A(R) = \iint_R dxdy = \int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dxdy = \frac{1}{3} \text{ por el ejemplo 02 del tercer caso}$$

Ejemplo 8.1.12 *Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$ e inferiormente por el plano xy*

Solución: proyectando al plano xy, se tiene $z = 0$ de donde $x^2+4y^2 = 4$, el volumen del sólido es simétrico entonces el proporción del sólido en el primer octante, es igual a una cuarto del volumen requerido , además los puntos d4e intersección con los ejes son:

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 & , x=0 \Rightarrow y=1 \\ & y=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
V(S) &= 4\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}(x^2+4y^2)dydx\\
&= 4\int_0^2 (yx^2+\frac{4}{3}y^3)\ |_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\ dx\\
&= 4\int_0^2 (\frac{1}{2}x^2\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{3}(\frac{1}{2}(4-x^2)^{1/2})^3)dx\\
V(S) &= \frac{4}{3}\int_0^2 (x^2+2)\sqrt{4-x^2}dx
\end{aligned}$$

integrando por sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\theta = x \quad &; \quad \text{si } x=0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0\\
2\cos\theta d\theta = dx \quad &; \quad \text{si } \ x=2 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\\
2\cos\theta &= \sqrt{4-x^2}
\end{aligned}$$

obtenemos:

$$\therefore V(S) = 4\pi$$

8.1.4. Centro de masa y momento de inercia

Consideramos una lamina homogénea que tiene la forma de una región cerrada R en el plano xy, y sea $\rho : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre R
Entonces la masa de la lamina R esta dado por :

$$\boxed{M = \iint_R x\rho(x,y)dA}$$

a) el momento de masa de una lamina R con respecto al eje x es:

$$\boxed{M_x = \iint_R y\rho(x,y)dA}$$

b) el momento de masa de una lamina R con respecto al eje y es:

$$\boxed{M_y = \iint_R x\rho(x,y)dA}$$

luego el centro de masa de la lamina es el punto $P(\overline{x},\overline{y})$ donde:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\rho(x,y)dA}{\iint_R x\rho(x,y)dA}}\ \mathbf{q}\ \boxed{\overline{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_R y\rho(x,y)dA}{\iint_R x\rho(x,y)dA}}$$

Definición 8.2 *El momento de inercia d una partícula cuya masa es $m(kg)$ al rededor de un eje , se define como mr^2 donde r se la distancia perpendicular de la partícula de eje $I = md^2$.*
El momento de inercia de una lamina que tiene la forma de una región plana R y una función densidad $\rho : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua ,con respecto al eje x y y está dado por:

$$\boxed{I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)dA} \; \mathbf{q} \; \boxed{I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)dA}$$

el momento polar de inercia al rededor del origen o esta dado por :

$$\boxed{I_o = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)dA}$$

Ejemplo 8.1.13 *Calcular la masa y el centro de masa de la lamina triangular con vértice $(0,0)$,$(0,a)$, $(a,0)$ para densidad $\rho(x,y) = x^2+y^2$*

Solución: Hallando la ecuación de la recta $\boldsymbol{\mathcal{L}}$:
$(x_0, y_0) = (a, 0)$ $(x_1, y_1) = (0, a)$ luego:
$-1(x-a) = y-0 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{L}} : x = a-y$ por otro lado

$$\begin{aligned}
M &= \iint_R \rho(x,y)dA \\
&= \int_0^a\int_0^{a-y} (x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_0^a (\frac{x^3}{3} + y^2x) \mid_0^{a-y} dy \\
&= \int_0^a (-\frac{(y-a)^3}{3} + ay^2 - y^3)dy \\
&= (-\frac{(y-a)^4}{12} + \frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}) \mid_0^a \\
\therefore M &= \frac{a^4}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_R x\rho(x,y)dA \\
&= \int_0^a\int_0^{a-y} x(x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_0^a (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}) \mid_0^{a-y} dy \\
&= (\frac{(a-y)^5}{20} + \frac{y^5}{10} - \frac{2ay^4}{8} + \frac{a^2y^3}{6}) \mid_0^a \\
\therefore M_y &= \frac{a^5}{15}
\end{aligned}$$

Observación:

Debido a la simetría de la figura $\overline{y}$ esta en la recta $x = y$ entonces si encontramos $\overline{x}$, también tenemos $\overline{y}$ además $\overline{y} \in \boldsymbol{\mathcal{L}} : x = y \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$

como $\overline{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{a^5/15}{a^4/6} = \dfrac{2a}{5} \Rightarrow \overline{y} = \dfrac{2a}{5}$

finalmente $(x, y) = (\dfrac{2a}{5}, \dfrac{2a}{5})$

Ejemplo 8.1.14 *encontrar la masa de una región plana acotada por un arco de la curva* $y = \operatorname{sen} x$ *, y el eje* x*, si la densidad es proporcional a la distancia desde el eje* x

Solución: según el dato $\rho(x, y) = ky$ luego:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_R \rho(x,y)dydx \\
&= k\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} ydydx \\
&= k\int_0^{\pi} \frac{y^2}{2} \,|_0^{\operatorname{sen} x}\, dx \\
&= k\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}dx \\
&= \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx \\
&= \frac{k}{4}(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2})|_0^{\pi} \\
\therefore M &= \frac{kx}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.15 *encontrar la masa y el centro de masa de la región de la forma de un cuadrado de vertices* $(1, 1)$ *;* $(1, -1)$ *;* $(-1, 1)$ *;* $(-1, -1)$ *y la densidad* $\rho(x, y) = |x|+|y|$

Solución: graficando el región tenemos, además hemos calculado el integral en el ejemplo anterior entonces:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_R (|x| + |y|)dxdy \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.16 *Calcular el momento de inercia respecto al eje* x *, de una lamina delgada limitada en plano* xy*, por las curvas* $y = \sqrt{2x}$ *,*$y = 0$*,* $x = 2$ *la densidad en un punto cualquiera de la lamina es* $\rho(x, y) = |x - y|$

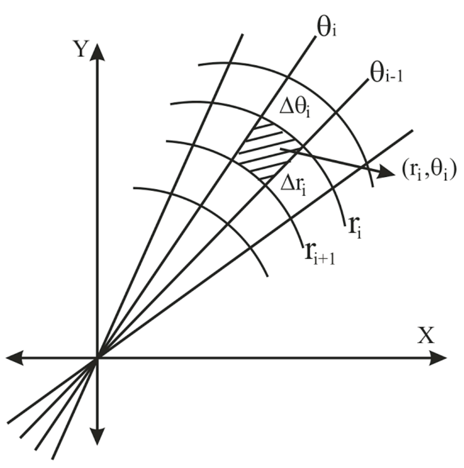
Solución: Graficando la región R y hallando los puntos de intersección tenemos en $(2,2)$ y $(0,0)$
además por definición

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ y-x & \text{si } x < y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_R y^2|x-y|dxdy \\
&= \int_0^2\int_y^2 y^2(x-y)dxdy - \int_0^2\int_{\frac{y^2}{2}}^{y} y^2(x-y)dxdy \\
&= \int_0^2 (\frac{x^2y^2}{2} - xy^3)\ |_y^2\ dy - \int_0^2 (\frac{x^2y^2}{2} - xy^3)\ |_{\frac{y^2}{2}}^2\ dy \\
&= ((\frac{2y^3}{3} - \frac{2y^4}{4} + \frac{y^5}{10}) - (\frac{-y^5}{10} + \frac{y^6}{12} - \frac{y^7}{56}))\ |_0^2 \\
&= ((\frac{16}{3} - \frac{16}{2} + \frac{32}{10}) - (-\frac{32}{10} + \frac{64}{12} - \frac{128}{56})) \\
\therefore I_x &= \frac{24}{35}
\end{aligned}$$

8.1.5. Integrales dobles en coordenadas polares

En esta parte veremos como se realiza el cambio de variable de una función $f(x,y)$ de las coordenadas cartesianas (x,y) a las coordenadas polares (r,θ) , aquí veremos su efecto sobre las integrales dobles.
Consideremos una región $D \subset \mathbb{R}^2$ acotado por $\alpha \leq \theta \leq \beta$ $a \leq r \leq b$ es decir:



$$\begin{aligned}
A(r_i) &= \frac{r_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{r_{i-1}^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) \\
&= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1}) \\
A(r_i) &= \overline{r_i}.\triangle r_i \triangle \theta_i
\end{aligned}$$

Donde $\overline{r_i} = \dfrac{r_i + r_{i-1}}{2}$, $\triangle r_i = r_i - r_{i-1}$, $\triangle\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$
tomando el punto $(\overline{r_i}, \overline{\theta_i})$ en la i-ésima subregion , donde $\theta_{i-1} \leq \overline{\theta_i} \leq \theta_i$ y formamos la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) A(r_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) \overline{r_i} \triangle r_i \triangle \theta_i$$

$$\boxed{\therefore \lim_{\|\triangle\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) A(r_i) = \iint_D f(r,\theta) dA = \iint_D f(r,\theta) r dr d\theta}$$

Observación:

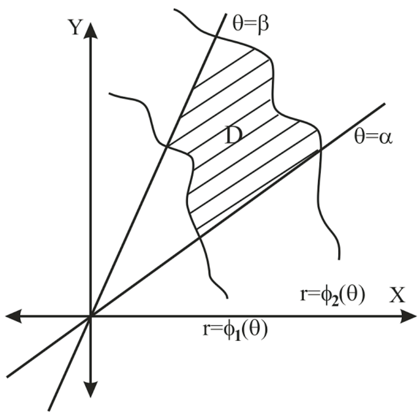
1. en coordenadas polares ,$dA = rdrd\theta = rd\theta dr$

2. $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) rdrd\theta$

8.1.6. Integrales iteradas en coordenadas polares

1º Caso

Consideremos la región polar D dado por $D\{(r,\theta)/\alpha \leq \theta \leq \beta \wedge \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta)\}$ y sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua sobre D

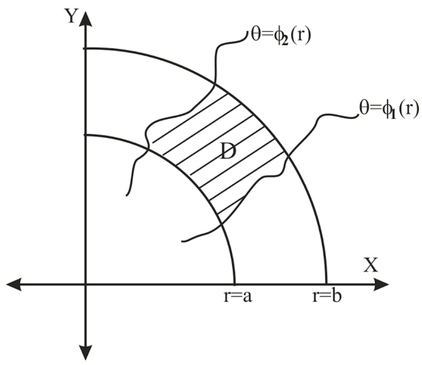


luego la integral en coordenadas polares es:

$$\boxed{\iint_D f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta}$$

2º Caso

Consideremos la región polar D dado por $D\{(r,\theta)/\phi_1(r) \leq \theta \leq \phi_2(r) \wedge a \leq r \leq b\}$ y sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua sobre D



luego la integral en coordenadas polares es:

$$\boxed{\iint_D f(r,\theta)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(r)}^{\phi_2(r)} f(r,\theta) r dr d\theta}$$

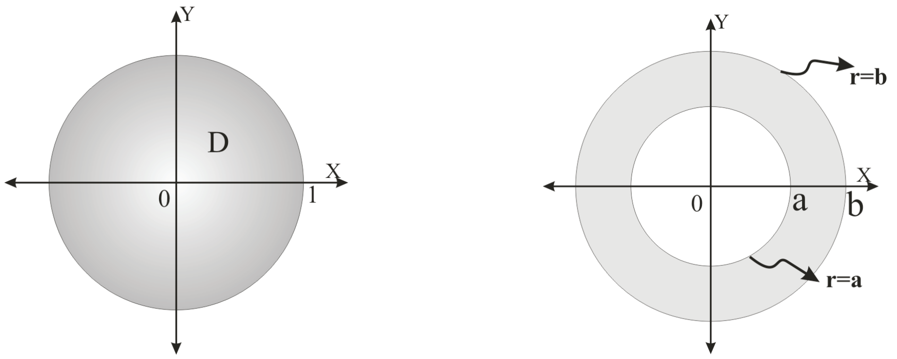
Ejemplo 8.1.17 *encuentre* $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}$ *; D limitada por una circunferencia de radio* 1 *y centro en origen ver figura 8.2(a)*

Solución: como la ecuación de la circunferencia esta dado por $x^2 + y^2 = 1$
Sea $x = r\cos\theta$,$y = r \operatorname{sen}\theta$ entonces la ecuación de circunferencia en coordenadas polares es $r = 1$ luego:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr d\theta \\
&= \int_0^{-} \frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} 2\pi \left.\right|_0^1 d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
\therefore \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} &= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.18 *calcular el valor de la integral doble* $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ *, donde D es la región limitada por los circunferencia* $x^2+y^2=a^2$ *,* $x^2+y^2=b^2$*,* $0\le a\le b$ *ver figura 8.2(b) pasando a coordenadas polares :* $x=r\cos\theta$ *,*$y=r\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} &= \int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{rdrd\theta}{r^2}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{drd\theta}{r}\\
&= \int_0^{2\pi} \ln r \,|_a^b \, d\theta = \int_0^{2\pi}(\ln b-\ln a)d\theta\\
\therefore \iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} &= 2\pi\ln\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

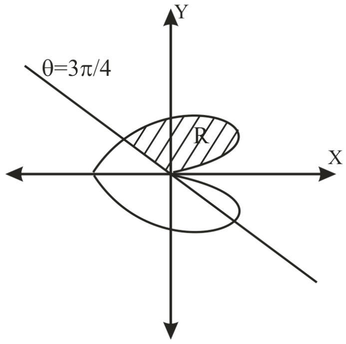


(a) gráfica de $x^2+y^2=1$ (b) gráfica de $a\leqslant x^2+y^2\leqslant b$

Figura 8.2:

Ejemplo 8.1.19 *Calcular la integral* $\iint_D dxdy$ *, donde D es la parte superior del eje x , esta limitado por la izquierda por la recta* $y=-x$ *y por la derecha por la curva* $3(x^2+y^2)^{1/2}-3x=x^2+y^2$

Solución:

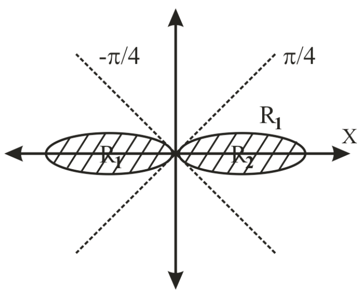


Pasando a coordenadas polares la curva $3(x^2 + y^2)^{1/2} - 3x = x^2 + y^2$:
$x = r\cos\theta$ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtenemos $3r - 3r\cos\theta = r^2$ entonces $r = 0$ $r = 3 - 3\cos\theta$
pasando a coordenadas polares la recta $x = -y$: $x = r\cos\theta$ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtenemos $r\,\mathrm{sen}\,\theta = -r\cos\theta$ entonces $\theta = 3\pi/4$

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \int_0^{3\pi/4}\int_0^{3-3\cos\theta} r dr d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/4}(3 - 3\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{3\pi/4}(1 - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta + 1}{2})d\theta \\
&= \frac{9}{2}(\frac{3\theta}{2} - 2\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4})\ |_0^{3\pi/4} \\
\therefore \iint_D dxdy &= \frac{9}{2}(\frac{9\pi}{4} - \sqrt{2} - \frac{1}{4})
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.20 *Hallar el area de la región limitada por las curvas* $(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 + y^2)$ *(lemniscata de Bernoulli)*

Solución:



pasando a coordenadas polares $x = r\cos\theta$ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtenemos $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ y para determinar los limites de integración hallamos los asíntotas para es decir $r = 0$ se obtiene $\cos 2\theta = 0$ entonces $\theta = \pi/4$ $\theta = -\pi/4$ luego:

$$\begin{aligned}
A(R) &= 2\iint_{R_1} dxdy \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdrd\theta \\
&= \frac{r^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{r^2}{2}\,|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2(2\cos 2\theta)drd\theta \\
&= (a^2\operatorname{sen} 2\theta)\,|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2(1+1) \\
A(R) &= 2a^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.21 *Calcular la masa y el centro de masa de la lamina que tiene la forma de la región dentro de la circunferencia $r = a\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ para la densidad $\rho(x,y) = kx$*

Solución: graficando dicho circunferencia tenemos

$$\begin{aligned}
M &= \iint_R \rho(x,y)dA \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} krrdrd\theta \\
&= k\int_0^{a\cos\theta}\frac{a^3\cos^3\theta}{3}d\theta \\
&= \frac{ka^3}{3}(\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3})\,|_0^{\pi/2} \\
\therefore M &= \frac{2ka^3}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \iint_D y\rho(x,y)dA \\
&= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} r^3\operatorname{sen}\theta drd\theta \\
&= \frac{k}{4}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta d\theta \\
&= -\frac{k}{4}\frac{\cos^5\theta}{5}\,|_0^{\pi/2} \\
\therefore M_x &= \frac{ka^4}{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x\rho(x,y)dA \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} r^3\cos\theta dr d\theta \\ &= \frac{k}{4}\int_0^{\pi/2} a^4\cos^5\theta d\theta \\ &= \frac{ka^4}{4}(\operatorname{sen}\theta - \frac{2\operatorname{sen}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5})\ |_0^{\pi/2} \\ \therefore M_y &= \frac{2ka^4}{15} \end{aligned}$$

finalmente :

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{3a}{5}\mathbf{qq}\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{9a}{40}$$

$$\therefore \mathbf{q}(\overline{x},\overline{y}) = (\frac{3a}{5}, \frac{9a}{40})$$

8.2. Integrales triples

La extensión de la integral doble a la integral triple es análoga a la extensión de la integral sencilla a la integral doble

Definición 8.3 *La función $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es integral en la región $S \subset \mathbb{R}^3$, si existe un numero real donde el numero L es la integral triple de f en S , al cual denotaremos por:*

$$\boxed{L = \lim_{|p|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)V(P_i) = \iiint_S f(x,y,z)dV}$$

8.2.1. Calculo de integrales triples mediante integrales iteradas

análogo a las integrales doble pueden presentar seis casos:

$$dxdydz\mathbf{q}dydxdz\mathbf{q}dzdxdy$$

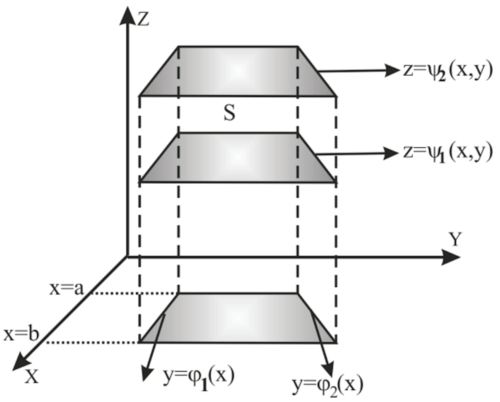
$$dxdzdy\mathbf{q}dydzdx\mathbf{q}dzdydx$$

Para calcular la integral triple en el orden $dzdydx$, consideremos una región cerrada en el plano xy

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\mathbf{q}a \leq x \leq b \wedge \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

donde $\phi_1,\ \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas , $\phi_1(x) \le \phi_2(x) \forall\ x \in [a,b]$,$\psi_1,\ \psi_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son continuas en D , $\psi_1(x,y) \le \psi_2(x,y) \forall\ (x,y) \in D$ entonces la región cerrada S de $\mathbb{R}^3$ esta dado por:

$$S : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{q} a \le x \le b \wedge \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \wedge \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$$



Si $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es una función continua en S, entonces la integral iterada de f es:

$$\boxed{\sum_{f}^{(} x,y,z)dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx}$$

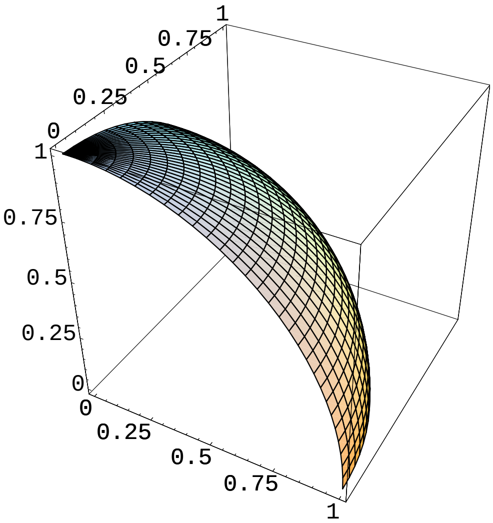
Ejemplo 8.2.1 *Calcular* $\sum_{z}^{d} xdydz$*, Si* S *es la región limitada por el tetraedro formado po el plano* $x+y+z=1$ *y loa planos coordenados:*

Solución: proyectando al plano xy se tiene $z=0$, $x+y=1$

$$\begin{aligned}
\sum_{z}^{d} xdydz &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-x-y} zdzdxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^y \frac{z^2}{2} \mid_0^{1-x-y} dzdxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^y 1-x-y^2 dxdy = -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x-y)^3 \mid_0^{1-y} dy \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-y)^3 dy = \frac{1}{6}(\frac{-(1-y)^4}{4}) \mid_0^1 \\
\therefore \sum_{z}^{d} xdydz &= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.2 *Calcular* $\sum_{x}^{y} dxdydz$ *, si el dominio* S *esta limitada por la esfera* $x^2+y^2+z^2=1$ *y los planos* $x=0$ *,*$y=0$ *,*$z=0$

Solución:



proyección al plano xy para $z=0$ entonces $x^2+y^2=1$ luego:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x}^{y} dxdydz &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xydzdxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xyz \mid_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \\
&= -\int_0^1 \frac{y}{3}(1-x^2-y^2) \mid_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 y(1-y^2)^{3/2}dy \\
\therefore \sum_{x}^{y} dxdydz &= \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.2.3 *Calcular* $\sum_{(}^{x\ \ 2} + y^2+z^2)dxdydz$ *si la región* S *es el paralelepípedo rectangular definido por las desigualdades* $0\le x\le a$*;* $0\le x\le b$ *;*$0\le x\le c$

Solución: proyectando al plano xy tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{(}^{x\;\;2} + y^2 + z^2)dxdydz &= \int_0^c\int_0^b\int_0^a (x^2+y^2+z^2)dxdydz \\
&= \int_0^c\int_0^b (\frac{x^3}{3} + xy^2 + xz^2) \mid_0^a dydz \\
&= \int_0^c\int_0^b (\frac{a^3}{3} + ay^2 + az^2)dydz \\
&= \int_0^c (\frac{ya^3}{3} + \frac{ay^3}{3} + ayz^2) \mid_0^b dz \\
&= \int_0^c (\frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3} + abz^2)dz \\
&= (\frac{zba^3}{3} + \frac{zab^3}{3} + \frac{abz^3}{3}) \mid_0^c \\
\therefore \sum_{(}^{x\;\;2} + y^2 + z^2)dxdydz &= \frac{abc}{3}(a^3+b^3+c^3)
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.4 *calcular* $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}x^2ydzdydx$ *, donde* S *es el sólido limitado por* $0 \leq z \leq \dfrac{\pi}{2}$ *,* $0 \leq y \leq a$ *,* $0 \leq x \leq y\cos z$

Solución:

$$\begin{aligned}
f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}x^2ydzdydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\int_0^{y\cos z} x^2ydxdydz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \frac{x^3y}{3} \mid_0^{y\cos z} dydz \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a y^4\cos^3 zdydz \\
&= \frac{1}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^3 zdz \\
&= \frac{1}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4(1-\operatorname{sen}^2 z)\cos zdz \\
&= \frac{a^4}{15}(\operatorname{sen} z - \frac{\operatorname{sen}^3}{3}z) \mid_0^{\frac{\pi}{2}} dz \\
\therefore f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}x^2ydzdydx &= \frac{2a^5}{45}
\end{aligned}$$

8.2.2. Volúmenes mediante integrales triples

Consideremos una función f definida en una región cerrada $S \subset \mathbb{R}^3$ es decir:
$f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / \ f(x, y, z) = 1 \mathbf{q} \forall (x, y, z) \in S$.
entonces el volumen del sólido S es dado por

$$\boxed{V(S) = \iiint_S dV = \iiint_S dxdydz}$$

Ejemplo 8.2.5 *Hallar el volumen del sólido en el primer octante acotado inferiormente por plano xy , superiormente por el plano $z = y$, lateralmente por el cilindro $y^2 = x$ y el plano $x = 0$*

Solución: proyectando al plano xy $(z = 0)$ entonces $y^2 = x$

$$\begin{aligned} V(S) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^y dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} ydydx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 xdx \\ \therefore V(S) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

8.2.3. Centro de masa y momento de inercia de un sólido

Sea $\rho : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $D \subset \mathbb{R}^3$, siendo $\rho(x, y, z)$ la densidad en el punto (x, y, z) entonces :

1. la mas total dl sólido D está dado por:

$$\boxed{M = \iiint_D \rho(x, y, z)dV}$$

2. los momento de masa , respecto a los planos coordenados ,del sólido D, con función de densidad $\rho : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)dV} \mathbf{q} \boxed{M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)dV}$$

$$\boxed{M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV}$$

y el centro de masa del sólido D es el punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ dado por: $\overline{x} = \dfrac{M_{yz}}{M}$ $\overline{y} = \dfrac{M_{xz}}{M}$ $\overline{z} = \dfrac{M_{xy}}{M}$

3. los momento de inercia del sólido $D \subset \mathbb{R}^3$, respecto a los ejes coordenados, se definamos por:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_D (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV\,\mathbf{q}\text{respecto al eje}\mathbf{q}x \\ I_y &= \iiint_D (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV\,\mathbf{q}\text{respecto al eje}\mathbf{q}y \\ I_z &= \iiint_D (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV\,\mathbf{q}\text{respecto al eje}\mathbf{q}z \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.6 *Hallar la masa del cuerpo limitado inferiormente por el plano xy y superiormente por el cono $9x^2 + z^2 = y^2$, lateralmente por $y = 9$, si la medida de la densidad de volumen en cualquier punto (x, y, z) es az*

Solución:

proyectando al plano xy

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D azdzdxdy \\ &= \int_0^9\int_{\frac{-y}{3}}^{\frac{y}{3}}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} azdzdxdy \\ &= \frac{a}{2}\int_0^9\int_{\frac{-y}{3}}^{\frac{y}{3}} z^2 \mid_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dxdy \\ &= \frac{a}{2}\int_0^9 (xy^2-3x^3) \mid_{\frac{-y}{3}}^{\frac{y}{3}} dy \\ &= a\int_0^9 \frac{2y^3}{6}dy \\ &= \frac{2a}{9}(\frac{y^4}{4}) \mid_0^9 \\ \therefore M &= \frac{729}{2}a \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.7 *calcular la masa del cubo $0 \leq x \leq a$; $0 \leq x \leq a$; $0 \leq x \leq a$ si la densidad del cubo en el punto (x,y,z) es $\rho(x,y,z) = x+y+z$*

Solución:

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D \rho(x,y,z)dV \\
&= \int_0^a\int_0^a\int_0^a (x+y+z)dzdxdy \\
&= \int_0^a\int_0^a (zx+zy+\frac{z^2}{2}) \mid_0^a dxdy \\
&= \int_0^a\int_0^a (ax+ay+\frac{a^2}{2})dxdy \\
&= a\int_0^a (\frac{ax}{2}+xy+\frac{x^2}{2}) \mid_0^a)dy \\
&= a\int_0^a (\frac{a^2}{2}+ay+\frac{a^2}{2}) \mid_0^a)dy \\
\therefore M &= \frac{3a^4}{2}
\end{aligned}$$

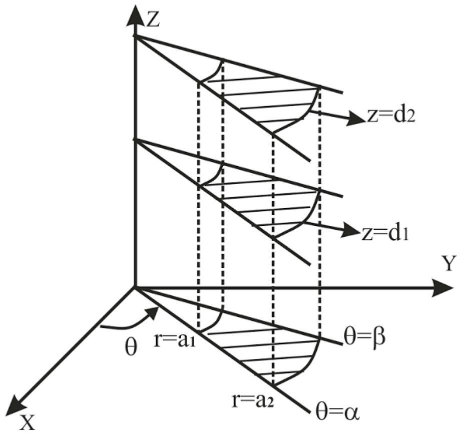
8.2.4. Integrales triples en coordenadas cilíndricas (r,θ,z)

Si una región $S \subset \mathbb{R}^3$, tiene un eje de simetría , los integrales triples se pueden calcular en forma muy simple usando coordenadas cilíndricas (r,θ,z) en el 3-espacio, dadas por las transformaciones (normalmente), el radio de la suoperfiecie cilíndrica es de cero al infinito, mientras el ángulo de rotación del sólido es cero a 2π y el eje Z toma valores sobre la recta real.

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\mathbf{q}\ 0 \leq r \leq \infty \\
y &= r\,\text{sen}\,\theta\mathbf{q}\ \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi\ ,\ \alpha\text{arbitrario} \\
z &= z\mathbf{q}z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Si $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre S entonces

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)rdzdrd\theta}$$



Ejemplo 8.2.8 *Hallar la integral de la función* $f(x, y, z) = x^2$ *sobre la porción del cilindro* $x^2 + y^2 = 9$ *, que se encuentra entre los planos* $z = 0$ $yz = 5$

Solución:

Proyectando al plano xy $(z = 0)$ entonces $x^2 + y^2 = 9$, pasando a coordenadas cilíndricas $(x = r\cos\theta \mathbf{q} y = r \operatorname{sen}\theta \mathbf{q} z = z)$

$$\begin{aligned}
\iiint_S f(x, y, z)dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3 \sqrt{r^2 + z^2} r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (r^2 + z^2)^{3/2} \mid_0^3 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 + z^2) dr d\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.9 *Calcular* $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$ *, donde la región* T *está limitado por las superficies* $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ *,* $z = 2$

Solución:

interceptando las superficies y proyectando al plano xy, $(z = 0)$ obtenemos $x^2 + y^2 = 4$

finalmente pasando a coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^3 - \frac{r^5}{2}) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}) \mid_0^2 d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} \\
\therefore \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz dr d\theta &= \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.10 *Calcular el volumen del sólido limitado por el cono* $c^2(z-h)^2 = h^{2(x^2+y^2)}$ *,* $z = 0$ *;* $c > 0$ *,*$h > 0$

Solución:

proyectando al plano xy $(z = 0)$ y pasando a coordenadas cilíndricas $z = z$ $x = r\cos\theta$ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\begin{aligned}
V(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^c\int_0^{h-\frac{hc}{2}} r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^c (h - \frac{hc}{2}) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3c}) \mid_0^c d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{hr^2}{2} - \frac{hc^3}{3c}) d\theta \\
\therefore V(S) &= \frac{\pi hc^2}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.11 *calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 4$ *y la superficie del paraboloide* $x^2+y^2 = 3z$

Solución:

halando las intersecciones tenemos:

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 3z \\ x^2+y^2+z^2 &= 4 \end{cases} \quad x^2+y^2+(\frac{x^2+y^2}{3})^2 = 4$$

$x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} rz \mid_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2} - \frac{r^3}{3})drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-(\frac{4-r^2}{3})^{3/2} - \frac{r^4}{12}) \mid_0^{\sqrt{3}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{19}{12} d\theta \\
\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta &= \frac{19\pi}{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.12 *Encuentre la masa y el centro de masa del sólido S limitado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a$ $(z > 0)$, si S tiene densidad constante k*

Solución:

hallando la intersección de las superficies y proyectando al plano $xy\mathbf{q}(z = 0)$ entonces:

$$\frac{a}{4} = x^2 + y^2$$

y finalmente pasando a coordenadas cilíndricas se obtiene

$$r = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\int_{4r^2}^{a} krdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} (ar - 4r^3)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{ar^2}{2} - r^4) \mid_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} d\theta \\
&= \frac{k}{16}\int_0^{2\pi} a^2 d\theta \\
\therefore M &= \frac{\pi k a^2}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\int_{4r^2}^{a} xkrdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\int_{4r^2}^{a} r\cos\theta krdzdrd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}(ar^2\cos\theta - 4r^4\cos\theta)drd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}(\frac{ar^3\cos\theta}{3} - \frac{4r^5\cos\theta}{5})\,|_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\,d\theta \\
&= ka^2\sqrt{a}\int_0^{2\pi}(\frac{\cos\theta}{24} - \frac{\cos\theta}{5.32})d\theta \\
&= \frac{a^2\sqrt{a}k}{60}(\operatorname{sen}\theta)\,|_0^{2\pi} \\
M_{yz} &= 0
\end{aligned}$$

resulta el momento de inercia de rotacion sobre el eje X, es nula para estos datos, además el cuerpo no gira respecto a este eje dado. Smilar respecto al eje Y, el momento de inercia es nula.

$$\begin{aligned}
M_{xz} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\int_{4r^2}^{a} ykrdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\int_{4r^2}^{a} r\operatorname{sen}\theta krdzdrd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}(ar^2\operatorname{sen}\theta - 4r^4\operatorname{sen}\theta)drd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}(\frac{ar^3\operatorname{sen}\theta}{3} - \frac{4r^5\operatorname{sen}\theta}{5})\,|_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\,d\theta \\
&= ka^2\sqrt{a}\int_0^{2\pi}(\frac{\operatorname{sen}\theta}{24} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{5.32})d\theta \\
&= \frac{a^2\sqrt{a}k}{60}(-\cos\theta)\,|_0^{2\pi} \\
M_{xz} &= 0
\end{aligned}$$

Resulta el momento de innercia sobre el eje Y

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}\int_{4r^2}^{a} zkrdzdrd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} r\frac{z^2}{2}\mid_{4r^2}^{a} drd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}(a^2r-16r^5)drd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}(\frac{a^2r^2}{2}-\frac{16r^6}{6})\mid_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{12}d\theta \\
\therefore M_{yz} &= \frac{a^3k\pi}{12}
\end{aligned}
$$

finalmente obtenemos:

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(0,0,\frac{2a}{3})$$

8.2.5. Integrales triples en coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ)

Cuando una región sólida $S\subset\mathbb{R}^3$ tiene una forma de un sólido de revolución (o eje de simetría) entonces la integral de una función $f(x,y,z)$ se simplifica en muchos casos cuando se utiliza coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) definida normalmente como sigue:

$$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$$

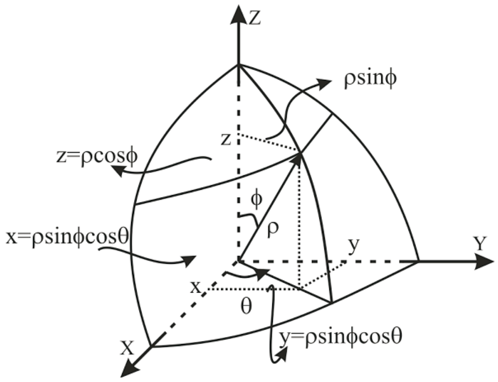
$$y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$$

$$z=\rho\cos\theta$$

$$\rho\geq 0\mathbf{q},\ 0\leq\phi\leq\pi\mathbf{q}\alpha\leq\theta\leq 2\pi+\alpha$$

Observación:

- θ está medido en un plano coordenado (xy en este caso)



- ρ y 2ϕ se mide en el espacio
- $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta$

Si $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre S , entonces:

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta}$$

Ejemplo 8.2.13 *evaluar la integral* $\displaystyle\iiint_S \frac{dzdxdy}{x^2+y^2+z^2}$ *, donde S es el sólido limitado por* $x^2+y^2+z^2=4$ *y los planos coordenados , usando coordenadas esféricas*

Solución:

pasando a coordenadas esféricas la ecuación del la superficie S obtenemos el siguiente resultado:

$$\rho = 2$$

$$\begin{aligned}
\iiint_S \frac{dzdxdy}{x^2+y^2+z^2} &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta}{\rho^2} \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (\rho \operatorname{sen})\ |_0^2\ d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (2\operatorname{sen}) d\phi d\theta \\
&= -2\int_0^{\pi/2} -\cos\theta\ |_0^{\pi/2}\ d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \\
\therefore \iiint_S \frac{dzdxdy}{x^2+y^2+z^2} &= \pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.14 *evalué* $\iiint_S xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$ *, en donde* S *es el sólido comprendido entre las esferas* $x^2+y^2+z^2=1$ *y* $x^2+y^2+z^2=4$ *en el primer octante*

Solución:

$$\begin{aligned}
\iiint_S xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta e^{\rho^4}\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\phi e^{\rho^2}(\rho^2-1)\mid_1^2 d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{3}{2}e^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta d\phi d\theta \\
&= \frac{3}{2}e^4\int_0^{\pi/2}\cos\theta(\phi-\frac{\operatorname{sen}2\phi}{2})\mid_0^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{3}{2}e^4\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{3}{2}e^4\operatorname{sen}\theta\mid_0^{\pi/2} \\
\therefore \iiint_S xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz &= \frac{3\pi e^4}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.15 *Hallar la integral triple*

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$$

Solución: como $0\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}\mathbf{q}\to|z|\le\sqrt{9-x^2-y^2}$ luego: $9=x^2+y^2+z^2$ proyectando al plano $xy\mathbf{q}(z=0)$localizando la superficie S y finalmente pasando a coordenadas esféricas:

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx =$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho\cos\phi\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta &= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\phi\operatorname{sen}\phi\rho^5\mid_0^3 d\phi d\theta \\
&= \frac{3^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\phi\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{3^5}{2*5}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2\phi)\mid_0^{\pi/2} d\theta
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx = \frac{243\pi}{5}$$

Ejemplo 8.2.16 *encontrar la masa del sólido acotada por las esferas* $x^2+y^2+z^2=4$ *y* $x^2+y^2+z^2=9$ *, si la densidad del volumen en cualquier punto es* $k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

Solución:

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_S \rho(x,y,z)dV \\
&= \iiint_S k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^{3} \rho\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{65k}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{65k}{4}\int_0^{2\pi} -\cos\phi \mid_0^{\pi} d\theta \\
\therefore M &= 65x\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.17 *Hallar el momento de inercia al eje z de la esfera* $x^2+y^2+z^2=1$ *con función de densidad* $\rho(x,y,z)=1$

Solución: transformando a coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
I_z &= \iiint_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} (\cos\phi-\frac{\cos^3\phi}{3}) \mid_0^{\pi} d\theta \\
\therefore I_z &= \frac{8\pi}{15}
\end{aligned}$$

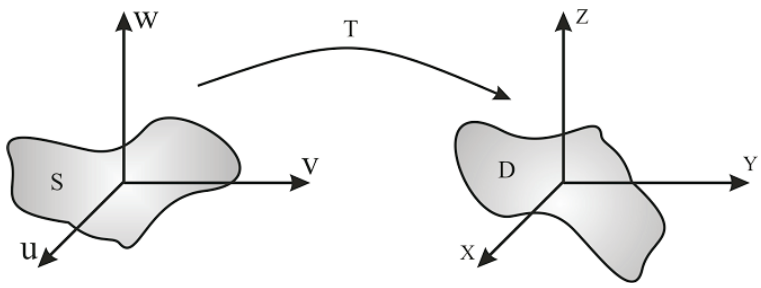
8.2.6. Cambio de variables en integrales triples

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación , tal que

$$(x,y,z)=T(u,v,w)=(x(u,v,w);y(u,v,w);z(u,v,w))$$

continua y diferenciable y con jacobiano no nulo es decir:

$$j(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$



$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S f(x(u,v,w);y(u,v,w);z(u,v,w))|j(u,v,w)|dudvdw}$$

cuando $f(x,y,z) = 1\forall \mathbf{q}x\ ,\ y\ ,z\ \in D$ se tiene el volumen del solido D es decir

$$\boxed{V(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_S |j(u,v,w)|dudvdw}$$

Ejemplo 8.2.18 *calcular* $\iiint_D xdxdydz$ *, donde*

$$D: 0 \leq x - z \leq 1\ ,\ 0 \leq y + z \leq 1\ ,\ 0 \leq x + z \leq 2$$

Solución:

Sea $u = x - z\mathbf{q} \to v + w = 2x \to x = \frac{1}{2}(v+w)$

$\mathbf{q}v = y + z\mathbf{q}z = x - u \to z = \dfrac{w-u}{2}$

$\mathbf{q}w = x + z\mathbf{q}y = v - \dfrac{(w-u)}{2}$

luego la región es:

$S: 0 \leq u \leq 1\ ,\ 0 \leq v \leq 1\ ,\ 0 \leq w \leq 2$

$$j(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

luego: $j(u,v,w) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\iiint_D xdxdydz &= \iiint_S \frac{1}{2}(u+v)|j(u,v,w)|dudvdw \\
&= \frac{1}{4}\iiint_S u+vdudvdw \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^1\int_0^1 u+vdudvdw \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^1 (\frac{u^2}{2}+uw)\mid_0^1 dvdw \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^1 (\frac{1}{2}+w)dvdw \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 (\frac{v}{2}+vw)\mid_0^1 dw \\
&= \frac{1}{4}(\frac{w}{2}+\frac{w^2}{2})\mid_0^2 \\
\therefore \iiint_D xdxdydz &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.19 *Sabiendo que el volumen de una bola de radio R es $\dfrac{4\pi r^3}{3}$, calcular el volumen de las región S encerrada por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ a , b , c , >0*

Solución:

Sea:$x = au$, $y = bv$, $z = cw$

entonces sustituyendo estos valores $T(u,v,z) = (x,y,z) = (au,bv,cw)$ entonces $u^2 + v^2 + w^2 = 1$

$$j(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

entonces: $j(u,v,w) = abc$

$$\begin{aligned}
V(D) &= \iiint_S 1|j(u,v,w)|dudvdw \\
&= abc\iiint_S dudvdw \\
&= abc(v(S)) \\
&= abc(\frac{4\pi r^3}{3}) \\
&= \frac{4}{3}\pi abc
\end{aligned}$$

8.2.7. Ejercicios propuestos

1. Determinar la Gradiente de la función dada

   a) $f(x,y) = 3z\ln(x+y)$

   b) $h(x,y) = e^y \tan 2x$

2. si $\phi(x,y,z) = 3x^2 - y$ hallar $\nabla\phi(1,-1,1)$

3. siendo $\phi(x,y,z) = 2xz^4 - x^4y$ hallar $\|\nabla\phi\|$ en el punto $(2,-2,-1)$

4. determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 17$ en el punto $(2,-2,3)$

5. obtener las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie $x^2 = 12y$ en el punto $(6,3,3)$

6. Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x+y+1}$ si la región D es el rectángulo $0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1$

7. calcular la integral doble $\displaystyle\iint_R |x-2|dxdy$ donde R es la región $1 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2$

8. Calcular la masa y el centro de masa de la lamina rectangular limitada por $x = 3y$ y $y = 2$ y la densidad ρ en cualquier punto es $xy^2\, k/m^3$

9. Calcular en momento de inercia respecto a eje x de una región encerrada por $4y = 3x$ $x = 4$ sabiendo que la densidad en cualquier punto es constante

10. Calcular la masa y centro de masa de la lamina en forma de región rectangular limitada por las rectas $x = 3y$, $y = 2$ y los ejes coordenados , la densidad de area, en cualquier punto es $x^2y^2\, kg/m^2$

11. calcular el momento de inercia respecto al eje x , de una lamina en forma de región limitada por $4y = 3x$, $x = y$ y el eje x

12. Calcular el valor de la integral doble $\displaystyle\iint_R \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ donde R es la región limitada por los círculos $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$

13. Hallar el área de la región encerrada por la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; $a > 0$

14. Calcular las siguientes integrales triples

    a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} xdzdydx$

    b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{2y}^{1+y^2} xdzdydx$

    c) $\displaystyle\int_2^4\int_{y^2}^1\int_0^{y} xyzdxdydz$

    d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y} (x+y+z)dzdydx$

15. Calcular $\displaystyle\iiint_D e^{x+y+z}dxdydz$ donde D es el tetraedro de vértices $(0,0,2)$, $(0,3,0)$, $(3,2,0)$

16. Hallar el volumen del tetraedro , limitado por el plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $(a,b,c>0)$ y los planos coordenados

17. Obtener la masa del sólido homogénea limitada por el cilindro $z=4-x^2$ y el plano $y=5$ y los planos coordenados . si la densidad de volumen en cualquier punto es $\rho kg/m^3$

18. Calcular $\displaystyle\int_0^{2r}\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dzdydx$ transformándola a coordenadas cilíndricas

19. Calcular la integral triple $\displaystyle\iiint_S (x^2+y^2)dxdydz$

20. Calcular la integral triple de $f(x,y,z)=\cos(x^2+y^2+z^2)$ sobre el sólido S encerrado entre las superficies $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=4$, $z=4$

21. Hallar el volumen del sólido S interior ala esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ y interior al cono $bz^2=x^2+y^2$ $(b>0)$ en el semiplano superior $(z>0)$

22. Calcular $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{3/2}dxdydz$, donde D está limitado por $x^2+y^2+z^2=1$

23. Evaluar $\displaystyle\iiint_S xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$, en donde S es el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$; $x^2+y^2+z^2=4$ en el primer octante

24. Hallar el volumen de la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ superiormente y por el cono $3(x^2+y^2)=z^2$ inferiormente.

25. Hallar el volumen de la región limitado superiormente por la esfera con la ecuación $r = a$ e inferiormente por el cono $\phi = b$

26. Encontrar la masa del sólido acotado por una esfera de radio a y centro en el origen si al densidad de volumen varia con el cuadrado de la distancia al centro.

27. Encontrar la masa y centro de masa del msólido limitado por las superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $x + y = 1$ si la densidad es constante en cualquier punto del sólido

28. Determinar el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogénea limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, la densidad de volumen en cualquier punto es $k\,kg/m^3$

29. Calcular la integra triple de $f(x, y, z) = y$ sobre la región

$$\begin{aligned} R:\ -1 &\leq x - z \leq 1 \\ 0 &\leq y + z \leq 2 \\ -1 &\leq x - z \leq 1 \\ 1 &\leq x + z \leq 3 \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Armando J. Venero Baldeon ***Matematicas III***

Lima-Peru,Ediciones Gemar S.A. -1998

[2] Cesar pérez López ***Matlab y sus aplicaiones en las ciencias e ingeniería***

Impreso: Pearson Educacion S.A. Madrid -España - 2002.

[3] Claudio Pita Ruiz ***Calculo Vectorial***

Mexico Editorial Prentice-Hall Hispanoamericano,S.A,1995

[4] Eduardo espinza Ramos ***Analisis Matematico II***

lima-Peru, Editorial Servicios Graficos j.j 2010

[5] Eduardo espinza Ramos ***Analisis Matematico III***

lima-Peru, Editorial Servicios Graficos j.j 2012

[6] Eliseo Pumacallahui S.; Richar M. Mollinedo Ch. ***Cálculo diferencial e integral: Para estudiantes de Ciencia e Ingeniería***

Impreso en: Imprenta LU Impresiones.E.I.R.L Puerto Maldonado -Perú - 2011.

[7] Elon Lages Lima ***Análisis Matemático***

Coleccion Textos Imca, Impreso en: Ediciones y Distribuciones Universitarias S.A. Lima -Perú - 1999.

[8] Elon Lages Lima ***Análisis Real***

Coleccion Textos Imca, Impreso en: Ediciones y Distribuciones Universitarias S.A. Lima -Perú - 1997.

[9] Elon Lages Lima ***Álgebra lineal***

Colección Textos Imca, Impreso en: Ediciones y Distribuciones Universitarias S.A. Lima -Perú - 1998.

[10] EC7 Louis Leithold ***EC7 El Calculo***

Mexico D.F Harper Perppendine University-Oxford USA, 1994

[11] Gabriel Loa ***Cálculo Diferencial: con aplicaciones en la vida diaria, pasito a pasito...***

Lima-Peru, Grupo Editorial Megabyte, 2013

[12] Gabriel Loa ***Cálculo Integral: con aplicaciones en la vida diaria, pasito a pasito...***

Lima-Peru, Grupo Editorial Megabyte, 2013

[13] James Stewards ***Cálculo, Conceptos y Contextos***

Mexico, Grupo Internacional Thonson Editores S.A, 199

[14] James Stewards ***Cálculo Multivariable***

Cuarta Edición, Grupo Internacional Thonson Editores S.A, 2002

[15] Hero Morales ***Matlab 7: Para ciencias e ingeniería con métodos numéricos y visualización gráfica***

Impreso en: Grupo Editorial MEGABYTE - 2005.

[16] Larson R., Hostetler B., y Edwards ***Cálculo diferencial-Matemática I***

Mexico, Mc Graw-Hill Internacional Editores S.A, 2010.

[17] Larson R., Hostetler B., y Edwards ***Cálculo 2 de varias variables***

Novena Edición Mexico, Mc Graw-Hill Internacional Editores S.A, 2010.

[18] Moises Lazaro Carrión ***Analisis Matematicas III***

Lima-Peru, Publicaciones Moshera, 2002

[19] Murray R. Spiegel ***Analisis Vectorial***

Rio De Janeiro, Brasil, Sedegra Sociedade Editorial E Grafica Ltda.1969

[20] Máximo Mitac-Carlos Peche ***Calculo III***

Lima-Peru, Editorial San Marcos, 1984

[21] Haaser, Norma, Lasalle,Sullivan ***Analisis Matematico Vol. 2***

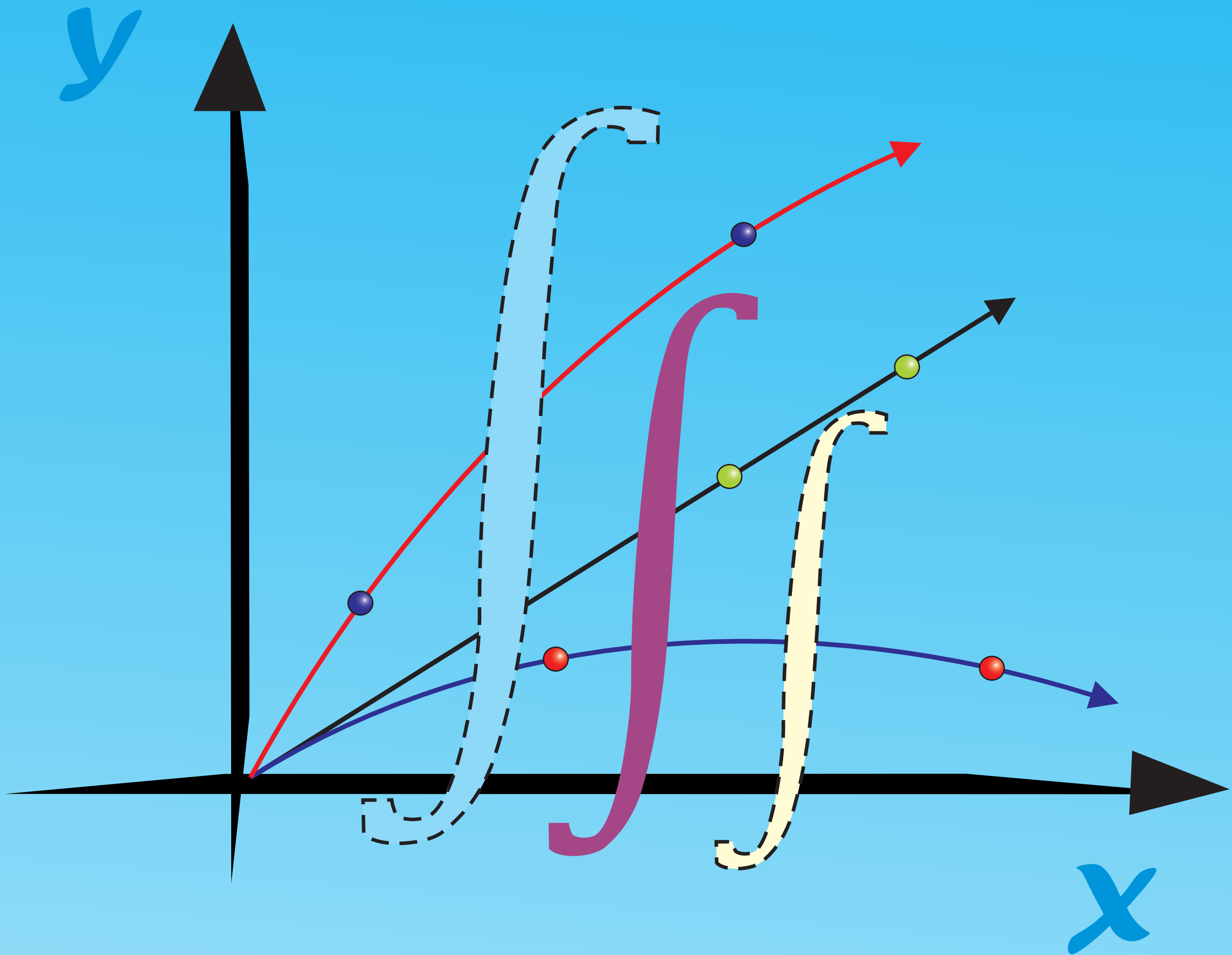
Mexico Editorial Trillas ,1995

[22] Rosa Barbolla, Paloma Sanz ***Algebra Lineal y teoría de matrices***

Printice Hall: Madrid -España - 1998.

[23] Víctor Ríos Falcón ***Cálculo diferencial e integral y aplicaciones***

Segunda Edición: Annita Impresos Publicidad Lima-Perú - 2013.



AUTORES:
Dr. VÍCTOR RÍOS FALCÓN
Mg. RICHAR MARLÓN MOLLINEDO CHURA
Dr. ELISEO PUMACALLAHUI SALCEDO